

**NMAG204 GEOMETRIE
STUDIJNÍ TEXT K PŘEDNÁŠCE**

JAN RATAJ

1. ÚVOD

1.1. Eukleidovský prostor.

Definice 1.1. n -rozměrný eukleidovský prostor je čtveřice $(E_n, V_n, \cdot, +)$, kde E_n je neprázdná množina (množina bodů prostoru), V_n je vektorový prostor dimenze n nad \mathbb{R} se skalárním součinem \cdot a $+$ je zobrazení $E_n \times V_n$ do E_n s vlastnostmi

- (1) $a + (u + v) = (a + u) + v$, $a \in E_n$, $u, v \in V_n$,
- (2) $a + o = a$, $a \in E_n$,
- (3) pro každou dvojici bodů $a, b \in E_n$ existuje právě jeden vektor $u \in V_n$ takový, že $a + u = b$. V tom případě značíme $u = b - a$.

Budeme pracovat se standardním modelem $E_n = V_n = \mathbb{R}^n$, s eukleidovským skalárním součinem

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n u^i v^i$$

a s indukovanou normou $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$, která určuje vzdálenost bodů v eukleidovském prostoru

$$d(a, b) = \|b - a\|.$$

Shodnost.

Definice 1.2. Zobrazení $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je *shodnost (izometrie)*, jestliže

$$\|S(y) - S(x)\| = \|y - x\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Věta 1.1. Zobrazení $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je shodnost právě tehdy, když

- (1) S je *afinní* (tzn. $S(x) = Ax + b$, kde A je matice typu $n \times n$ a $b \in \mathbb{R}^n$,
- (2) A je *unitární* ($A^T A = I$).

Poznámky k důkazu. Je snadné ověřit, že zobrazení s vlastnostmi (1) a (2) je shodností. Obráceně, je-li S shodnost, lze snadno ukázat, že zobrazuje přímky na přímky a zachovává dělicí poměr na přímkách. Z toho už pak snadno lze vyvodit, že zobrazení $S_0(x) := S(x) - S(o)$ je lineární, a zbývá dokázat jeho ortogonalitu. Větu v důkazem lze nalézt v textu k přednášce Lineární algebra a geometrie II kolegů L. Barto a J. Tůmy, viz http://mseke.karlin.mff.cuni.cz/~barto/linalg1213/skripta_la3.pdf. □

Shodnost S je *přímá (nepřímá)*, jestliže $\det A = 1$ ($\det A = -1$).

1.2. Vektorový součin v \mathbb{R}^3 . Buď $\{e_1, \dots, e_3\}$ kanonická báze \mathbb{R}^3 (tedy $(e_i)^j = \delta_{ij}$). *Orientovaný objem* vektorů $u_1, \dots, u_3 \in \mathbb{R}^3$ je číslo

$$\det(u_1, \dots, u_3) = \det(e_i \cdot u_j)_{i,j=1}^3.$$

Orientovaný objem je lineární v každé složce, antisymetrický a platí

$$|\det(u_1, \dots, u_3)| = \lambda^3 \left(\left\{ \sum_1^3 t_i u_i : 0 \leq t_i \leq 1 \right\} \right), \quad u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Definice 1.3. *Vektorový součin* $u \times v \in \mathbb{R}^3$ vektorů $u, v \in \mathbb{R}^3$ je definován vztahem

$$(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w), \quad w \in \mathbb{R}^3.$$

Věta 1.2 (Vlastnosti vektorového součinu). *Pro libovolné dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ platí*

- (1) *zobrazení $(u, v) \mapsto u \times v$ je bilineární,*
- (2) *$u \times v = 0 \iff u, v$ jsou lineárně závislé,*
- (3) *$(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0,$*
- (4) *$\|u \times v\| = \lambda^2(\{su + tv : 0 \leq s, t \leq 1\}).$*

Cvičení:

- (1) Pro $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$ je

$$(u \times v) \cdot (x \times y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix},$$

tedy speciálně

$$\|u \times v\| = \sqrt{\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix}}.$$

- (2) Pro $u = (u^1, u^2, u^3)^T, v = (v^1, v^2, v^3)^T \in \mathbb{R}^3$ je

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right)^T.$$

1.3. Diferenciál zobrazení. Buď F zobrazení z otevřené množiny $G \subseteq \mathbb{R}^m$ do \mathbb{R}^n . Řekneme, že F je diferencovatelné, je-li třídy C^∞ na G , tj. má-li spojité parciální derivace všech řádů na G . *Diferenciál* F v bodě $x \in G$ je lineární zobrazení

$$dF_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

určené podmínkou

$$\|F(x + \xi) - F(x) - dF_x(\xi)\| = o(\|\xi\|), \quad \|\xi\| \rightarrow 0.$$

Hodnota $dF_x(\xi)$ se též nazývá derivací ve směru ξ a speciálně $dF_x(e_i) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(x)$ je parciální derivace F podle x^i . Lineární zobrazení dF_x je určeno svou maticí

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{i=1, j=1}^{m, n}.$$

Je-li $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, značíme $F'(t) = dF_t(1)$.

Diferenciál druhého řádu d^2F chápeme jako (obyčejný) diferenciál zobrazení

$$dF : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

tedy $d^2F_x = d(dF)_x$ je lineární zobrazení z \mathbb{R}^m do $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, neboli (ekvivalentně) bilineární zobrazení z $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ do \mathbb{R}^n . Toto zobrazení je symetrické (záměnnost smíšených derivací) a speciálně platí $d^2F_x(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(x)$.

Věta 1.3 (Diferenciál složeného zobrazení). *Jsou-li $G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $F : V \rightarrow U$ diferencovatelné, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^k$ otevřené, pak pro $x \in V$ platí*

$$d(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x.$$

Jsou-li F, G dvakrát diferencovatelné, pak

$$d^2(G \circ F)_x(u, v) = d^2G_{F(x)}(dF_x(u), dF_x(v)) + dG_{F(x)}(d^2F_x(u, v)).$$

Cvičení:

- (1) Pro afinní zobrazení $S : x \mapsto Ax + b$ je $dF_x = A$ pro všechna x .
- (2) $F : (x, y) \mapsto x \cdot y \implies dF_{(x,y)}(\xi, \eta) = x \cdot \eta + \xi \cdot y$
- (3) $F(x) = \|x\| \implies dF_x(\xi) = \frac{x \cdot \xi}{\|x\|}$
- (4) $F : (x, y) \mapsto x \times y \implies dF_{(x,y)}(\xi, \eta) = x \times \eta + \xi \times y$
- (5) $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bilineární forma, $Q(x) = B(x, x)$ příslušná kvadratická forma, pak $dQ_x(\xi) = B(x, \xi) + B(\xi, x)$.

2. KŘIVKY

2.1. Základní pojmy.

Definice 2.1. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy C^∞) $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrizovaná křivka* v \mathbb{R}^n . Množina $\langle c \rangle := c(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*.

Pozn.: Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na I restrikci na I diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném intervalu obsahujícím I .

Příklad: $c(t) = (t, t)^T$ je parametrizace přímky, $c(t) = (\cos t, \sin t)^T$ parametrizace jednotkové kružnice v \mathbb{R}^2 ($I = \mathbb{R}$).

Pozn.: Obraz křivky nemusí mít tečnu v každém svém bodě, viz např. $c(t) = (t^3, t^2)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

Definice 2.2. Parametrizovaná křivka $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je *regulární*, jestliže $c'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Vektor

$$\mathbf{t}(t) := \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

nazýváme (*jednotkovým*) *tečným vektorem* křivky v bodě t .

Pozn.: Zobrazení c nemusí být prosté, bod $x \in c(I)$ obrazu křivky tedy nemusí mít jednoznačně určenou tečnu (př. - $c(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)^T$). Je-li c prosté, říkáme, že parametrizovaná křivka je jednoduchá.

Příklad: Zobrazení $c(t) = (t, t)^T$ ($t > 0$) a $\tilde{c}(t) = (e^t, e^t)^T$ ($t \in \mathbb{R}$) mají stejný obraz, tedy ‘parametrizují tutéž křivku’.

Definice 2.3. Je-li $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka a $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ difeomorfismus intervalu \tilde{I} na I , je $\tilde{c} = c \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako c . Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* křivky c . Je-li navíc $\phi' > 0$ na \tilde{I} , nazveme ϕ *změnou parametru zachovávající orientaci*.

Pozn.: Křivku v \mathbb{R}^n lze definovat jako třídu ekvivalence množiny všech regulárních parametrizovaných křivek modulo ekvivalence ‘změna parametru’.

Věta 2.1. *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená a $F : G \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ diferencovatelné. Označme $\Gamma = \{x \in G : F(x) = 0\}$ a buď $x_0 \in \Gamma$ takový, že zobrazení dF_{x_0} je na \mathbb{R}^{n-1} . Pak existuje okolí U bodu x_0 v \mathbb{R}^n , otevřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$ a regulární parametrizovaná křivka $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že $c(I) = \Gamma \cap U$.*

Důkaz. Protože dF_{x_0} je na, je po eventuálním přechíslování proměnných determinant matice $\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{i,j=1}^{n-1}$ různý od nuly. Podle věty o implicitních funkcích tedy existuje otevřený interval I obsahující x_0^n , okolí V bodu $(x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$ a diferencovatelné zobrazení $g : I \rightarrow V$ takové, že $g(x_0^n) = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$ a $F(g(x_n), x_n) = 0$ na I . Zobrazení $c : x_n \mapsto (g(x_n), x_n)$ je pak hledanou regulární parametrizovanou křivkou. \square

2.2. Délka křivky.

Definice 2.4. *Délka parametrizované křivky $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definována jako*

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| : m \in \mathbb{N}, t_0 < t_1 < \dots < t_m \in I \right\}.$$

Věta 2.2. *Pro parametrizovanou křivku c platí*

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| dt.$$

Důkaz. Přednáška Matematická analýza 3. \square

Definice 2.5. *Křivka $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je parametrizována obloukem, jestliže $\|c'(s)\| = 1$ pro všechna $s \in I$.*

Pozn.: V geometrii se obvykle parametr oblouku značí symbolem s . Někdy se též používá značení $\frac{dc}{ds}c =: c'(s)$ pro derivaci podle parametru oblouku, kdežto $\frac{dc}{dt}c =: \dot{c}(t)$ pro derivaci podle obecného parametru.

Věta 2.3. *Ke každé regulární parametrizované křivce $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje změna parametru $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ zachovávající orientaci a taková, že $\tilde{c} = c \circ \phi$ je parametrizace obloukem.*

Důkaz. Zvolme $t_0 \in I$ a položme

$$\ell(t) = \int_{t_0}^t \|c'(\tau)\| d\tau, \quad t \in I$$

(délka křivky $c \upharpoonright (t_0, t)$) a označme $\tilde{I} = \ell(I)$ obraz intervalu I (\tilde{I} je opět interval). Funkce $\ell : I \rightarrow \tilde{I}$ je rostoucí a $\ell'(t) = \|c'(t)\|$, $t \in I$. Položme $\phi = \ell^{-1}$, pak $\phi'(s) = \|c'(\phi(s))\|^{-1}$, a tedy parametrizace $\tilde{c} = c \circ \phi$ splňuje $\|\tilde{c}'(s)\| = \|c'(\phi(s))\phi'(s)\| = 1$. \square

Příklad: Regulární parametrizovaná křivka $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^T$, $t \in (0, 2\pi)$ má parametrizaci obloukem $\tilde{c}(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r})^T$, $s \in (0, 2\pi r)$.

2.3. Křivost.

Definice 2.6. Buď $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka. Její *křivost* v bodě $t \in I$ je definována vztahem

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|c'(t)\|}, \quad t \in I.$$

Body t nulovou křivostí nazýváme *inflexními body* křivky.

Pozn.: Pro křivku c parametrizovanou obloukem zřejmě platí

$$\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|c''(s)\|, \quad s \in I.$$

Věta 2.4. Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ platí

$$\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Důkaz. Protože $\mathbf{t} = c'/\|c'\|$, platí

$$\mathbf{t}' = \left(\frac{c'}{\|c'\|} \right)' = \frac{\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'')c'}{\|c'\|^3}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \|\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'')c'\|^2 &= \|c'\|^4 \|c''\|^2 - \|c'\|^2 (c' \cdot c'')^2 \\ &= \|c'\|^2 \det \begin{pmatrix} c' \cdot c' & c' \cdot c'' \\ c' \cdot c'' & c'' \cdot c'' \end{pmatrix} \\ &= \|c'\|^2 \|c' \times c''\|^2, \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce pro normu vektorového součinu z kapitoly 1.2. Dokazovaný vztah pak plyne z definice $\kappa = \|\mathbf{t}'\|/\|c'\|$. \square

2.4. Frenetův repér křivky v \mathbb{R}^3 .

Definice 2.7. Buď $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka. V neinflexním bodě $t \in I$ definujeme:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &= c'(t)/\|c'(t)\| && \text{tečný vektor} \\ \mathbf{n}(t) &= \mathbf{t}'(t)/\|\mathbf{t}'(t)\| && \text{normálový vektor} \\ \mathbf{b}(t) &= \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) && \text{binormálový vektor} \\ \tau(t) &= \mathbf{n}'(t) \cdot \mathbf{b}(t)/\|c'(t)\| && \text{torze} \\ c(t) + \text{Lin}\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\} &&& \text{oskulační rovina} \\ c(t) + \text{Lin}\{\mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t)\} &&& \text{rektifikační rovina} \\ c(t) + \text{Lin}\{\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\} &&& \text{normálová rovina} \end{aligned}$$

Věta 2.5 (Frenetovy rovnosti). Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a každý její neinflexní bod platí:

- (i) $E(t) := \{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ je ortonormální báze \mathbb{R}^3 .
- (ii) $\mathbf{t}'(t) = \|c'(t)\|\kappa(t)\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{n}'(t) = \|c'(t)\|(-\kappa(t)\mathbf{t}(t) + \tau(t)\mathbf{b}(t))$ a $\mathbf{b}'(t) = -\|c'(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t)$, v maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \|c'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. (i). Zřejmě $\|\mathbf{t}(t)\| = 1$. Dále derivováním vztahu $\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}(t) = 1$ dostaneme $2\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}'(t) = 0$, tedy $\mathbf{n}(t) \perp \mathbf{t}(t)$ a z definice též $\|\mathbf{n}(t)\| = 1$. Z vlastností vektorového součinu pak plyne, že $\mathbf{b}(t)$ je kolmý na $\mathbf{t}(t)$ i $\mathbf{n}(t)$ a má rovněž jednotkovou velikost.

(ii). První vztah plyne přímo z definic $\mathbf{n}(t)$ a $\kappa(t)$. Vyjádřeme dále vektor \mathbf{n}' v souřadnicích vůči bázi $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$:

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}.$$

Derivováním vztahu $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ dostaneme $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n}$, což je rovno $-\|c'\|\kappa$ dle první rovnosti. Dále opět z $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ plyne $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = 0$. Konečně $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = \|c'\|\tau$ z definice torze, čímž dostáváme druhou rovnost. Využitím obou již dokázaných vztahů dále dostaneme pro $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' \\ &= \|c'\|(\kappa\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times (-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{n})) \\ &= \|c'\|\tau(\mathbf{t} \times \mathbf{b}) = -\|c'\|\tau\mathbf{n} \end{aligned}$$

(rovnost $\mathbf{t} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$ se snadno ověří z definice vektorového součinu), což dává třetí Frenetovu rovnost. \square

Poznámka 2.6. Z definice je zřejmé, že je-li $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka zachovávající orientaci a $\phi : J \rightarrow I$ změna parametru, pak tečna, hlavní normála a binormála reparametrizované křivky $\tilde{c} = c \circ \phi$ splňují v neinflexním bodě $s \in J$

$$\tilde{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{t}(\phi(s)), \quad \tilde{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{n}(\phi(s)), \quad \tilde{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{b}(\phi(s)),$$

tedy vektory Frenetova repéru nezávisí na parametrizaci křivky. Derivováním pak dostaneme

$$\tilde{\mathbf{t}}'(s) = \mathbf{t}'(\phi(s))\phi'(s), \quad \tilde{\mathbf{n}}'(s) = \mathbf{n}'(\phi(s))\phi'(s), \quad \tilde{\mathbf{b}}'(s) = \mathbf{b}'(\phi(s))\phi'(s),$$

a protože také $\tilde{c}'(s) = c'(\phi(s))\phi'(s)$ a $\phi'(s) > 0$ pro změnu parametru zachovávající orientaci, dostaneme

$$\tilde{\kappa}(s) = \kappa(\phi(s)) \quad \text{a} \quad \tilde{\tau}(s) = \tau(\phi(s)),$$

tedy ani křivost a torze nezávisí na parametrizaci křivky zachovávající orientaci. Není těžké ověřit, že při změně orientace křivky vektory \mathbf{t} a \mathbf{b} a torze τ mění znaménko, vektor \mathbf{n} a křivost κ se nemění.

Věta 2.7. Pro libovolnou regulární parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{b}(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|}$$

a

$$\tau(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t), c'''(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2}, \quad t \in I.$$

Důkaz. První rovnost plyne z toho, že vektory c', c'' určují stejný podprostor jako \mathbf{t}, \mathbf{n} a báze $\{c', c''\}$ a $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ jsou shodně orientovány. Pro ověření druhé rovnosti vyjádřeme

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|} = \left(\frac{c'}{\|c'\|} \right)' \frac{1}{\|c'\|\kappa} = \frac{c''\|c'\|^2 - c'(c' \cdot c'')}{\|c'\|^3} \frac{\|c'\|^2}{\|c' \times c''\|}$$

(použili jsme definici křivosti a vzorec z Věty 2.4). Derivováním uvedené rovnosti dostaneme vztah

$$\mathbf{n}' = \alpha c' + \beta c'' + \frac{\|c'\|}{\|c' \times c''\|} c'''$$

pro nějaké (skalární) funkce α, β . Z definice torze a vlastností vektorového součinu pak dostaneme

$$\tau = \frac{\mathbf{n}' \times \mathbf{b}}{\|c'\|} = \frac{1}{\|c'\|} \frac{\|c'\|}{\|c' \times c''\|} c''' \cdot \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} = \frac{\det(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2}.$$

□

Věta 2.8. *Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ platí*

$$\tau(t) = 0, t \in I \iff \text{křivka leží v rovině.}$$

Důkaz. Je snadné ukázat, že rovinná křivka má nulovou torzi. Předpokládejme tedy naopak, že $\tau = 0$. Z Frenetových vzorců je pak $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}$ je konstantní na I . Zvolme $t_0 \in I$ a položme

$$g(t) = (c(t) - c(t_0)) \cdot \mathbf{b}, \quad t \in I.$$

Platí

$$g'(t) = c'(t) \cdot \mathbf{b} = \frac{\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{b}}{\|c'(t)\|} = 0,$$

tedy funkce g je konstantní na I . Protože však $g(t_0) = 0$, je $g = 0$ a křivka leží v rovině $\{x : (x - c(t_0)) \cdot \mathbf{b} = 0\}$. □

Věta 2.9. *Buďte $c, \bar{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dvě křivky parametrizované obloukem takové, že jejich funkce křivosti a torze splývají, tedy $\bar{\kappa} = \kappa$ a $\bar{\tau} = \tau$ na I . Pak existuje shodnost $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ taková, že $\bar{c} = S \circ c$.*

Důkaz. Zvolme $s_0 \in I$. Existuje právě jedna shodnost $S : x \mapsto Ax + x_0$ na \mathbb{R}^3 splňující

$$c(s_0) + x_0 = \bar{c}(s_0), A\mathbf{t}(s_0) = \bar{\mathbf{t}}(s_0), A\mathbf{n}(s_0) = \bar{\mathbf{n}}(s_0), A\mathbf{b}(s_0) = \bar{\mathbf{b}}(s_0),$$

kde $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ je Frenetův repér křivky c a $\{\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}}\}$ Frenetův repér křivky \bar{c} . (Protože oba Frenetovy repéry jsou kladně orientovány, je S přímá shodnost, neboli $\det A = 1$).

Obě křivky jsou parametrizovány obloukem, proto Frenetovy rovnice mají tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}' \\ \bar{\mathbf{n}}' \\ \bar{\mathbf{b}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}} \\ \bar{\mathbf{n}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix}.$$

Aplikujeme-li na první z uvedených soustav rovnic lineární transformaci A , dostaneme

$$\begin{pmatrix} A\mathbf{t}' \\ A\mathbf{n}' \\ A\mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\mathbf{t} \\ A\mathbf{n} \\ A\mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Z posledních dvou soustav rovnic je zřejmé, že trojice vektorových funkcí $(\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}})$ a $(A\mathbf{t}, A\mathbf{n}, A\mathbf{b})$ vyhovují stejné soustavě lineárních diferenciálních rovnic na intervalu

I , a navíc se vzhledem k volbě A shodují v bodě $s_0 \in I$. Podle věty o jednoznačnosti řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic tedy musí platit

$$\bar{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}, \quad \bar{\mathbf{n}} = A\mathbf{n} \quad \text{a} \quad \bar{\mathbf{b}} = A\mathbf{b} \quad \text{na } I.$$

Speciálně máme $\bar{c}' = Ac'$, tudíž

$$S(c(s)) - S(c(s_0)) = \int_{s_0}^s Ac'(t)dt = \int_{s_0}^s \bar{c}'(t)dt = \bar{c}(s) - \bar{c}(s_0),$$

z čehož plyne $S(c(s)) = \bar{c}(s)$, $s \in I$. \square

Věta 2.10. *Budte $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ dvě diferencovatelné funkce na intervalu I , a nechtě navíc $\kappa > 0$ na I . Pak existuje křivka $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem a taková, že její křivost je κ a torze τ .*

Důkaz. Frenetovy rovnice (viz důkaz Věty 2.9) udávají soustavu lineárních diferenciálních rovnic pro trojici vektorových funkcí $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$, $s \in I$. (Vyjádříme-li si vektory po souřadnicích, dostaneme soustavu devíti rovnic pro devět reálných funkcí; matici soustavy je pak třeba chápat tak, že symboly κ a τ reprezentují matice $\kappa I_3, \tau I_3$, kde I_3 je jednotková matice v \mathbb{R}^3 .) Předepíšeme-li počáteční podmínky ve vybraném bodě $s_0 \in I$ například jako

$$\mathbf{t}(s_0) = e_1, \quad \mathbf{n}(s_0) = e_2, \quad \mathbf{b}(s_0) = e_3$$

(s vektory kanonické báze e_1, e_2, e_3), z teorie lineárních diferenciálních rovnic víme, že soustava má řešení na intervalu I . Ukážeme nejprve, že vektory $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ tvoří ortonormální bázi \mathbb{R}^3 pro každé $s \in I$. Šestice reálných funkcí

$$(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6) = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{b})$$

splňuje podle Frenetových rovnic diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} h_1' &= 2\kappa h_4, \\ h_2' &= -2\kappa h_4 + \tau h_6, \\ h_3' &= -2\tau h_6, \\ h_4' &= -\kappa h_1 + \kappa h_2 + \tau h_5, \\ h_5' &= -\tau h_4 + \kappa h_6, \\ h_6' &= -\tau h_2 + \tau h_3 - \kappa h_5. \end{aligned}$$

Konstantní šestice funkcí $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ vyhovuje této soustavě a splňuje počáteční podmínku v bodě s_0 . Z věty o jednoznačnosti řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic je to jediné řešení, a tedy vektory $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ tvoří ortonormální bázi \mathbb{R}^3 pro každé $s \in I$.

Položme dále

$$c(s_0) := o, \quad c(s) := \int_{s_0}^s \mathbf{t}(t) dt, \quad s \in I.$$

Zřejmě platí $c'(s) = \mathbf{t}(s)$, c je tedy křivka parametrizovaná obloukem a \mathbf{t} je její tečný vektor. Z první Frenetovy rovnice máme $\|\mathbf{t}'\| = \kappa\|\mathbf{n}\| = \kappa$, tedy κ je křivostí křivky c . Rovněž z první Frenetovy rovnice pak plyne $\mathbf{n} = \mathbf{t}'/\kappa$, tedy \mathbf{n} je vektor hlavní normály křivky c . Vektor \mathbf{b} pak nutně musí být binormálovým vektorem a τ je torze křivky c , z druhé (nebo třetí) Frenetovy rovnice. \square

2.5. Křivky v rovině. Na parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ můžeme nahlížet jako na křivku v prostoru, doplníme-li třetí souřadnici nulou. V neinflexních bodech lze definovat vektory tečny a (hlavní) normály jako v Definicí 2.7, vektor binormály bude identicky roven (až na znaménko) třetímu vektoru kanonické báze e_3 . Báze $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ může být kladně nebo záporně orientována vůči kanonické bázi; označme $\sigma(t) := \operatorname{sgn} \det(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t))$. Protože vektor hlavní normály dostaneme otočením vektoru tečny o $\pm\pi/2$, v souřadnicích platí

$$(\mathbf{n}^1(t), \mathbf{n}^2(t)) = \sigma(t)(-\mathbf{t}^2(t), \mathbf{t}^1(t)).$$

Definice 2.8. Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definujeme znaménkovou křivost v bodě t vztahem

$$\kappa_z(t) := \sigma(t)\kappa(t), \quad t \in I.$$

Tvrzení 2.11. Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Důkaz. Vztah plyne z definice κ_z a ze vzorce pro $\kappa(t)$ ve větě 2.4, neboť zřejmě platí

$$\det(c'(t), c''(t)) = \sigma(t)\|c'(t) \times c''(t)\|$$

(chápeme-li vektory na pravé straně jako vnořené do \mathbb{R}^3). □

Pozn.: Zřejmě platí $\kappa_z = \operatorname{sgn}(\det(t, n))\kappa$, tedy $|\kappa_z| = \kappa$.

Věta 2.12. Buď $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ křivka parametrizovaná obloukem. Pak existuje diferencovatelná funkce $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\begin{aligned} \cos \theta(s) &= \mathbf{t}^1(s), \\ \sin \theta(s) &= \mathbf{t}^2(s), \quad s \in I. \end{aligned}$$

Funkce θ není určena jednoznačně, ale rozdíly $\theta(t_2) - \theta(t_1)$ nezávisí na volbě θ . Navíc platí

$$\kappa_z(s) = \theta'(s), \quad s \in I.$$

Důkaz. Funkce θ je spojitou verzí argumentu funkce $T(t)$ (chápeme-li ji jako komplexní funkci) a její existence a diferencovatelnost je známa z komplexní analýzy. Zderivováním první rovnice a dosazením z druhé dostaneme

$$-\theta'(s)\mathbf{t}^2(s) = \kappa(s)\mathbf{n}^1(s).$$

Protože $\mathbf{n}^1(s) = -\sigma(s)\mathbf{t}^2(s)$ (viz výše), dostáváme

$$\theta'(s)\mathbf{t}^2(s) = \kappa(s)\sigma(s)\mathbf{t}^2(s) = \kappa_z(s)\mathbf{t}^2(s),$$

a je-li $\mathbf{t}^2(s) \neq 0$, zkrácením dostaneme požadovaný vztah. Je-li $\mathbf{t}^2(s) = 0$, postupujeme analogicky derivováním druhé z rovností ve znění věty (aspoň jedna ze souřadnic $\mathbf{t}(s)$ musí být nenulová). □

Definice 2.9. Je-li t neinflexním bodem křivky c v \mathbb{R}^2 , nazýváme číslo $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ poloměrem křivosti a kružnici se středem $p(t) = c(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t)$ a poloměrem $\rho(t)$ oskulační kružnicí křivky c v bodě t .

Pozn.: Křivka c a její oskulační kružnice mají v bodě $c(t)$ ‘dotyk druhého řádu’, tj. mají v tomto bodě společnou tečnu i křivost.

Věta 2.13. *Bud' $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka. Pak platí:*

- (1) $\kappa(t) = 0$, $t \in I$, právě když $c(I)$ je část přímky,
- (2) $\kappa(t) = \kappa \neq 0$, $t \in I$, právě když $c(I)$ je část kružnice o poloměru κ^{-1} .

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že křivka je parametrizována obloukem. V obou tvrzeních jsou implikace \Leftarrow zřejmé, dokážeme \Rightarrow .

- (1). Je-li $\kappa = 0$, z Frenetových vzorců dostaneme $0 = \mathbf{t}' = c''$, tedy $c(s) = as + b$.
- (2). Bud' $\kappa(s) = \kappa$ konstantní. Položíme $p(s) = c(s) + \kappa^{-1}\mathbf{n}(s)$; platí $p'(s) = \mathbf{t}(s) + \kappa^{-1}\mathbf{n}'(s)$ a opět z Frenetových vzorců máme $p'(s) = 0$, tedy $p(s) = p$ a $\|c(s) - p\| = |\kappa|^{-1}$. \square

Definice 2.10. Bud' $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka s nenulovou křivostí. Parametrizovaná křivka

$$\tilde{c} : t \mapsto c(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t), \quad t \in I,$$

se nazývá *evoloutou křivky c* . Původní křivka c se naopak nazývá *evolventou křivky \tilde{c}* .

Pozn.: Evoluta je tvořena středy oskulačních kružnic dané křivky. Evoluta nemusí být regulární parametrizovaná křivka (např. evoluta kružnice je tvořena jen jedním bodem).

Tvrzení 2.14. *Nechť je křivka $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizovaná obloukem, $s_0 \in I$, a nechť je křivost $\kappa(s)$ křivky c nenulová na I . Pak parametrizovaná křivka*

$$\bar{c} : s \mapsto c(s) - (s - s_0)c'(s), \quad s \in I \setminus \{s_0\},$$

je její evolventou.

Důkaz. Derivováním a užitím Frenetových vzorců spočteme

$$\begin{aligned} \bar{c}'(s) &= -(s - s_0)\kappa(s)\mathbf{n}(s), \\ \bar{c}''(s) &= (s - s_0)k(s)^2\mathbf{t}(s) - (\kappa(s) + (s - s_0)\kappa'(s))\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

($\mathbf{t}, \mathbf{n}, \kappa$ značí po řadě tečnu, normálu a křivost křivky c). Tečna, normála a křivost křivky \bar{c} splňují:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}}(s) &= -\operatorname{sgn}(s - s_0)\mathbf{n}(s), \\ \bar{\mathbf{n}}(s) &= \operatorname{sgn}(s - s_0)\mathbf{t}(s), \\ \bar{\kappa}(s) &= |s - s_0|^{-1}. \end{aligned}$$

Evoluta křivky \bar{c} má tedy parametrizaci

$$\bar{p}(s) = \bar{c}(s) + \bar{\kappa}(s)^{-1}\bar{\mathbf{n}}(s) = c(s),$$

čímž je tvrzení dokázáno. \square

2.6. Globální teorie rovinných křivek.

2.6.1. *Rotační index.*

Definice 2.11. Parametrizovaná křivka $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je *uzavřená*, jestliže $c(a) = c(b)$ a $c^{(i)}(a) = c^{(i)}(b)$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Uzavřená křivka je *jednoduchá*, je-li c prosté na $[a, b]$.

Buď $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ úhlové zobrazení z Věty 2.12.

Definice 2.12. Buď $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uzavřená křivka parametrizovaná obloukem. Číslo

$$n_c = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

se nazývá *rotační index* křivky c .

Lemma 2.15. *Rotační index je celé číslo a platí*

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa_z(s) ds.$$

Důkaz. Z definice uzavřené křivky máme $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(b)$, tedy $\theta(b) - \theta(a)$ je celým násobkem 2π . Poslední rovnost plyne z vlastnosti $\theta'(s) = \kappa_z(s)$ (Věta 2.12). \square

Následující dvě věty jsou sice intuitivně zřejmé, jejich formální důkaz však není triviální.

Věta 2.16 (Jordanova). *Je-li c jednoduchá uzavřená regulární parametrizovaná křivka, pak existují otevřené souvislé množiny $\text{Int } c$ (vnitřek c), $\text{Ext } c$ (vnějšek c) takové, že $\text{Int } c$ je omezená, $\text{Ext } c$ neomezená a*

$$\mathbb{R}^2 = \text{Int } c \cup \langle c \rangle \cup \text{Ext } c$$

je disjunktní rozklad.

Řekneme, že jednoduchá uzavřená křivka $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je *kladně orientovaná*, jestliže pro každé t , $c(t) + \varepsilon\sigma(t)\mathbf{n}(t) \in \text{Int } c$ pro dostatečně malá ε . V opačném případě je křivka *záporně orientovaná*. (Při obvyklé orientaci roviny to znamená, že při průběhu křivky leží vnitřek oblasti “po levé ruce”.)

Věta 2.17 (Umlaufsatz). *Je-li c jednoduchá uzavřená regulární parametrizovaná křivka s kladnou (zápornou) orientací, pak $n_c = 1$ ($n_c = -1$).*

Lemma 2.18. *Buď $c = (x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka. Pak plošný obsah oblasti $\text{Int } c$ je roven*

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (xy' - x'y)dt.$$

Pozn. : Jedná se o velmi speciální případ Greenovy věty pro rovinné křivky.

Částečný důkaz: Zřejmě stačí dokázat první rovnost, neboť druhá plyne z první použitím integrace per partes a třetí je přímým důsledkem prvních dvou. Omezíme se na případ *konvexní* uzavřené jednoduché křivky c , tj. takové, že $\text{Int } c$ je konvexní podmnožina \mathbb{R}^2 . Kolmá projekce $\text{Int } c$ na osu x je interval $[x_1, x_2]$ a průnikem obrazu křivky c s ‘opěrnými přímkami’ $x = x_1, x = x_2$ jsou po řadě lineární segmenty (eventuelně degenerované do jednoho bodu) $[c(t_1), c(t_2)], [c(t_3), c(t_4)]$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $t_4 = a$. Obrazy částí křivky $c \mid [a, t_1]$ a $c \mid [t_2, t_3]$

jsou pak grafy funkcí proměnné x , které označíme po řadě f_1, f_2 . Plošný obsah A je pak roven

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) dx$$

a po provedení substituce $x = x(t)$ dostaneme

$$A = - \int_a^{t_1} y(t)x'(t) dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t) dt = - \int_a^b y(t)x'(t) dt,$$

neboť $x'(t) = 0$ podél segmentů rovnoběžných s osou y . Tím je žádaná rovnost dokázána. \square

Věta 2.19 (Isoperimetrická nerovnost). *Bud' $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená regulární parametrizovaná křivka délky L a buď A plošný obsah vnitřku $\text{Int } c$. Pak*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

přitom rovnost nastane, právě když $c[a, b]$ je kružnice.

Důkaz. Nerovnost zřejmě stačí ukázat pro konvexní uzavřenou jednoduchou křivku, neboť konvexní obal nekonvexní oblasti má vždy větší plochu a menší délku obvodu. Mějme tedy konvexní uzavřenou jednoduchou křivku parametrizovanou obloukem $c(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, L]$, umístěnou tak, že její kolmá projekce na osu x je $[-r, r]$ a $x(0) = r$, $x(s_1) = -r$. Dále označme

$$\bar{y}(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x(s)^2}, & s \in [0, s_1], \\ -\sqrt{r^2 - x(s)^2}, & s \in [s_1, L]. \end{cases}$$

$(x(s), \bar{y}(s))$ je parametrizace kružnice se středem v počátku a poloměrem r . Podle předchozího Lemmatu máme

$$A = \int_0^L xy' ds, \quad \pi r^2 = - \int_0^L \bar{y}x' ds,$$

tudíž

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (xy' - \bar{y}x') ds.$$

Podle Schwartzovy nerovnosti

$$xy' - \bar{y}x' = \begin{pmatrix} x \\ -\bar{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} \leq \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} = r,$$

máme tedy odhad

$$A + \pi r^2 \leq Lr.$$

Podle známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}Lr,$$

a tedy $4\pi Ar^2 \leq L^2 r^2$, čímž je nerovnost dokázána.

Předpokládejme nyní, že nastal případ $L^2 = 4\pi A$. Z postupu důkazu je zřejmé, že musí být $A = \pi r^2$ (rovnost v AG-nerovnosti); pak ale $L = 2\pi r$ a tedy délka průmětu $2r$ nezávisí na směru promítání. Dále musí platit rovnost ve Schwartzově nerovnosti pro vektory $(x, -\bar{y})^T$, $(y', x')^T$, tedy $(x, -\bar{y})^T = \alpha(y', x')^T$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$. Porovnáním délek obou vektorů dostaneme $\alpha = \pm r$, a tedy $x = \pm ry'$.

Protože r nezávisí na směru promítání, můžeme zaměnit proměnné a platí též $y = \pm rx'$, z čehož plyne

$$x^2 + y^2 = r^2(x'^2 + y'^2) = r^2,$$

tedy obraz c je kružnice. □

3. SFÉRICKÁ GEOMETRIE

V této kapitole se budeme zabývat geometrií na jednotkové sféře v prostoru

$$\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

Definice 3.1. *Hlavní kružnice* na sféře je libovolná kružnice $\ell \subset \mathbb{S}^2$ jednotkového poloměru (lze ji tedy vyjádřit jako průnik \mathbb{S}^2 s rovinou procházející počátkem). Hlavní kružnice se nazývají též *přímkami* na sféře. *Úsečkou* na sféře rozumíme libovolný oblouk hlavní kružnice délky nejvýše rovné π .

Pozn.: Je zřejmé, že pro každou dvojici $A, B \in \mathbb{S}^2$ různých bodů na sféře, které nejsou *antipodální* (tedy $A \neq \pm B$) existuje právě jedna úsečka na sféře spojující A, B (leží v hlavní kružnici dané průnikem sféry s rovinou určenou body A, B a počátkem).

Definice 3.2. *Vzdálenost* bodů $A, B \in \mathbb{S}^2$ definujeme jako délku úsečky spojující tyto body.

Pozn.: Lze ukázat, že délka libovolné křivky na sféře spojující dva body je větší nebo rovna vzdálenosti těchto bodů, přitom rovnost nastává právě tehdy, když se jedná o úsečku. Toto bude později vyplývat z teorie geodetických křivek.

Definice 3.3. Buďte AB a AC dvě úsečky na sféře s délkami z intervalu $(0, \pi)$. *Úhel* sevřený těmito úsečkami definujeme jako úhel sevřený rovinami oAB a oAC (tedy rovinami vytínajícími příslušné hlavní kružnice).

Pozn.: Nechť jsou dány parametrizace $c_1 : [0, \ell_1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ úsečky AB a $c_2 : [0, \ell_2] \rightarrow \mathbb{S}^2$ úsečky AC takové, že $c_1(0) = c_2(0) = A$. Úhel sevřený úsečkami AB, AC na sféře je pak roven limitě eukleidovského úhlu (v \mathbb{R}^3) $\angle(c_1(t), c_2(t))$ při $t \rightarrow 0$.

Pro výpočet plošného obsahu oblasti na sféře můžeme použít standardní sférické souřadnice, tedy prosté zobrazení

$$\phi : \begin{cases} x(\alpha, \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta), \\ y(\alpha, \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta), \\ z(\alpha, \beta) &= \sin(\beta) \end{cases} \quad \alpha \in (-\pi, \pi), \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Jakobián $\phi(\alpha, \beta)$ je roven $\cos \beta$, takže pro Borelovskou podmnožinu $U \subset \mathbb{S}^2$ máme

$$S(U) = \iint_{\phi^{-1}(U)} \cos \beta \, d\alpha \, d\beta.$$

Definice 3.4. Buďte dány tři různé body $A, B, C \in \mathbb{S}^2$ takové, že vektory (z počátku) A, B, C jsou lineárně nezávislé. Úsečky AB, AC a BC (délek v $(0, \pi)$) vymezují dvě souvislé oblasti na sféře, z nichž tu o menším obsahu nazýváme sférickým trojúhelníkem a značíme Δ_{ABC} . (Formálně lze sférický trojúhelník definovat jako průnik tří polosfér s hranicemi tvořenými hlavními kružnicemi obsahujícími příslušné úsečky.)

Věta 3.1. *Plošný obsah sférického trojúhelníka Δ_{ABC} je roven*

$$S(\Delta_{ABC}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

kde α, β, γ jsou velikosti úhlů trojúhelníka u vrcholů A, B, C .

Důkaz. Označme $A' = -A, B' = -B$ a $C' = -C$ body protilehlé bodům A, B, C . Celou sféru lze pokrýt osmi trojúhelníky s disjunktími vnitřky

$$\mathbb{S}^2 = \Delta_{ABC} \cup \Delta_{ABC'} \cup \Delta_{AB'C} \cup \Delta_{A'BC} \cup \Delta_{AB'C'} \cup \Delta_{A'BC'} \cup \Delta_{A'B'C} \cup \Delta_{A'B'C'},$$

přítom těchto osm trojúhelníků je tvořeno čtyřmi páry vzájemně izometrických trojúhelníků (např. $\Delta_{ABC} \approx \Delta_{A'B'C'}$, $\Delta_{ABC'} \approx \Delta_{A'B'C}$). Protože celá sféra má plošný obsah 4π dostaneme rovnost

$$2\pi = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{ABC'}) + S(\Delta_{AB'C}) + S(\Delta_{A'BC}).$$

Dšle si všimneme, že dvojice trojúhelníků $\Delta_{ABC} \cup \Delta_{A'BC}$ pokrývá oblast vymezenou dvěma polosférami s hraničními hlavními kružnicemi obsahujícími úsečky AB a AC , tedy svírajícími úhel α . Tato oblast má plošný obsah 2α , máme tedy rovnost

$$2\alpha = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{A'BC}).$$

Podobnou úvahou dostaneme

$$2\beta = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{AB'C}),$$

$$2\gamma = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{ABC'}).$$

Sečteme-li poslední tři rovnosti a odečteme od ní tu předcházející, dostaneme požadovaný vzorec. \square

Ve sférické geometrii platí sinová věta jako v euklidovském případě.

Věta 3.2 (Sinová věta ve sférické geometrii). *Pro sférický trojúhelník Δ_{ABC} se stranami délek a, b, c a velikostmi protilehlých úhlů α, β, γ platí*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Důkaz. Použijeme následující identitu, která platí pro libovolné tři vektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$$

(Vzhledem k linearitě stačí identitu ověřit pro vektory kanonické báze, což je snadné.) Použijeme-li identitu pro vektory $B \times C, C \times A$ a A (body A, B, C jednotkové sféry můžeme chápat též jako vektory z počátku), dostaneme

$$(B \times C) \times (C \times A) = ((B \times C) \cdot A)C$$

(protože $(A \times B) \cdot B = 0$). Označme po řadě $\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_b, \mathbf{n}_c$ jednotkové vektory kolmé k rovinám hlavních kružnic určených body oBC, oAC, oAB , a s orientací takovou, aby báze $\{A, B, \mathbf{n}_c\}$, $\{B, C, \mathbf{n}_a\}$ a $\{C, A, \mathbf{n}_b\}$ měly kladnou orientaci, pak z vlastností vektorového součinu

$$\mathbf{n}_a = (\sin a)B \times C, \quad \mathbf{n}_b = (\sin b)C \times A, \quad \mathbf{n}_c = (\sin c)A \times B,$$

za předpokladu, že vrcholy A, B, C trojúhelníka jsou očíslovány v takovém pořadí, aby $\det(A, B, C) > 0$. Po dosazení do výše uvedené rovnosti máme

$$(\sin a \sin b)\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_b = \det(A, B, C)C.$$

Opět z vlastností vektorového součinu je zřejmé, že $\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_b = (\sin \gamma)C$, a tedy, dosazením a porovnáním velikosti dostáváme

$$\sin a \sin b \sin \gamma = \det(A, B, C).$$

Protože výraz vpravo se nemění při kladné permutaci vrcholů trojúhelníka, platí rovnost

$$\sin a \sin b \sin \gamma = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta,$$

a vydělením výrazem $\sin a \sin b \sin c$ dostaneme kýženou rovnost. \square

Cosinová věta má ve sférické geometrii odlišnou podobu.

Věta 3.3 (Cosinová věta ve sférické geometrii). *Za předpokladů věty 3.2 platí*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Důkaz. Použijeme identitu

$$(B \times C) \cdot (C \times A) = (B \cdot C)(C \cdot A) - (B \cdot A)(C \cdot C) = (B \cdot C)(C \cdot A) - (B \cdot A).$$

S využitím normál z důkazu předchozí věty pak dostaneme

$$(\sin a \sin b)\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = \cos b \cos a - \cos c,$$

a protože zřejmě je $\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = -\cos \gamma$, máme

$$-(\sin a \sin b) \cos \gamma = \cos b \cos a - \cos c.$$

\square

Důsledek 3.4 (Pythagorova věta ve sférické geometrii). *Pro pravouhlý sférický trojúhelník ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) platí*

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

4. PLOCHY

4.1. Základní pojmy.

Definice 4.1. *Parametrizovaná plocha* v \mathbb{R}^3 je diferencovatelné zobrazení

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

kde U je otevřená podmnožina \mathbb{R}^2 a df_u je prosté pro každé $u \in U$. Množina $f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ se nazývá *obraz* parametrizované plochy f . Je-li navíc zobrazení $f : U \rightarrow f(U)$ homeomorfismus, nazýváme f *mapou*.

Pozn.: Vektory parciálních derivací

$$f_{u^1}(u) = \frac{\partial f}{\partial u^1}(u), \quad f_{u^2}(u) = \frac{\partial f}{\partial u^2}(u)$$

parametrizované plochy f v bodě u jsou dle předpokladu lineárně nezávislé.

Věta 4.1. *Bud' $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená a $\phi : V \rightarrow U$ difeomorfismus V na U . Pak $\tilde{f} = f \circ \phi$ je parametrizovaná plocha se stejným obrazem jako f .*

Důkaz. Podle pravidla o diferenciale složeného zobrazení platí

$$d\tilde{f}_v = df_{\phi(v)} \circ d\phi_v.$$

Podle předpokladů mají obě lineární zobrazení na pravé straně hodnost 2, a tedy i $d\tilde{f}_v$ má hodnost 2 pro každé $v \in V$. \square

Definice 4.2. Zobrazení ϕ z předchozí věty se nazývá *změna parametru* plochy f . Je-li $\det d\phi > 0$ na V , nazývá se *změnou parametru zachovávající orientaci*.

Pozn.: Záměna souřadnic $(v^1, v^2)^T \mapsto (v^2, v^1)^T$ je změnou parametru, která nezachovává orientaci.

Příklady:

- (1) $f(u^1, u^2) = \mathbf{a} + u^1\mathbf{b} + u^2\mathbf{c}$, $U = \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$) - rovina,
- (2) $f(u^1, u^2) = (\cos u^1 \cos u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^2)^T$, $U = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - jednotková sféra bez pólů,
- (3) $f(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2})^T$, $U = \{(u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$ - otevřená polofséra,
- (4) $f(u^1, u^2) = (p(u^1) \cos u^2, p(u^1) \sin u^2, q(u^1))^T$, $U = I \times \mathbb{R}$ - rotační plocha (vznikne rotací regulární parametrizované křivky $u^1 \mapsto (p(u^1), 0, q(u^1))^T$ ležící v rovině $\{x^2 = 0\}$ kolem osy x^1 ; předpokládáme $p \neq 0$ a $(p')^2 + (q')^2 > 0$).

Pozn.: Parametrizovaná plocha nemusí být mapou, ani když je zobrazení f prosté. Lokálně ale tento výsledek platí:

Tvrzení 4.2. Buď $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha.

- (i) Ke každému bodu $u \in U$ existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu u takové, že f je prosté na U_0 .
- (ii) Nechť f je prosté a nechť $U_0 \subset U$ je omezená otevřená podmnožina s $\overline{U_0} \subset U$. Pak restrikce $f|_{U_0}$ je mapa.

Důkaz. (i): Buď $u \in U$. Protože matice diferenciálu $Df(u)$ má hodnotu 2, existuje $\eta > 0$ takové, že

$$\|df_u v\| \geq \eta \|v\| \quad \text{pro všechny vektory } v \in \mathbb{R}^2.$$

Protože f je diferencovatelné třídy C^1 , závisí diferenciál df_u spojitě na u , a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\|df_z v - df_u v\| \leq \frac{\eta}{2} \|v\|, \quad v \in \mathbb{R}^2, \quad z \in U_\delta(u).$$

Jsou-li $x, y \in U_\delta(u)$, pak podle vícerozměrné varianty Lagrangeovy věty existuje $z \in U_\delta(u)$ takové, že $f(y) - f(x) = df_z(y - x)$, a tedy

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &= \|df_z(y - x)\| \\ &\geq \|df_u(y - x)\| - \|df_u(z - x) - df_z(y - x)\| \\ &\geq \eta \|y - x\| - \frac{\eta}{2} \|y - x\| = \frac{\eta}{2} \|y - x\|, \end{aligned}$$

což je kladné v případě $y \neq x$, a tedy f je prosté na okolí $U_\delta(u)$.

V důkazu části (ii) potřebujeme ukázat, že f je homeomorfismus U_0 na $f(U_0)$. Protože f je diferencovatelné, je jistě spojitě. Stačí tedy dokázat, že i f^{-1} je spojitě na $f(U_0)$.

Předpokládejme pro spor, že f^{-1} není spojitě na $f(U_0)$, tedy že existuje posloupnost bodů $x_n = f(u_n) \in f(U_0)$ takové, že $x_n \rightarrow x_0 = f(u_0)$, ale $f^{-1}(x_n) \not\rightarrow f^{-1}(x_0)$, tedy $u_n \not\rightarrow u_0$. Množina $\overline{U_0} \subset U$ je kompaktní, podle Weierstrassovy věty tedy existuje podposloupnost posloupnosti (u_n) , která konverguje k bodu $u' \in U$. Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že přímo $u_n \rightarrow u'$. Protože f je spojitě na U , musí platit $x_n = f(u_n) \rightarrow f(u')$. Z jednoznačnosti limity pak máme $f(u_0) = f(u')$, a z prostoty f též $u_0 = u'$, což je spor, neboť $u_n \not\rightarrow u_0$. \square

Definice 4.3. *Plocha* v \mathbb{R}^3 je neprázdná podmnožina $S \subseteq \mathbb{R}^3$ taková, že ke každému $x \in S$ existuje otevřené okolí $V \subseteq \mathbb{R}^3$ bodu x , otevřená množina $U \subseteq \mathbb{R}^2$ a mapa $f : U \rightarrow V$ taková, že $f(U) = S \cap V$.

Lemma 4.3. *Buď $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená a $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce. Pak graf $h = \{(u, h(u)) : u \in U\}$ je plocha.*

Důkaz: Zobrazení $f : u \mapsto (u, h(u))$ je diferencovatelné a prosté, rovněž df_u je prosté pro každé $u \in U$. Zobrazení f^{-1} z grafu h na U je spojitý, neboť je restrikcí spojitého zobrazení (projekce do prvních dvou souřadnic).

Definice 4.4. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^3$ otevřená a $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná. Bod $x \in G$ je *kritickým bodem* funkce F , jestliže $dF_x = 0$. $F(x)$ je pak *kritickou hodnotou* funkce F . $a \in F(G)$ je *regulární hodnotou* funkce F , jestliže $F^{-1}(a)$ neobsahuje žádný kritický bod F .

Věta 4.4. *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^3$ otevřená, $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná taková, že 0 je regulární hodnota F . Pak $F^{-1}(0)$ je plocha.*

Důkaz. Buď $x_0 \in F^{-1}(0)$. Podle předpokladu je $dF_{x_0} \neq 0$, tedy existuje souřadnice (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že x^3) taková, že $dF_{x_0}(e_3) = \frac{\partial F}{\partial x^3}(x_0) \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U bodu (x_0^1, x_0^2) , okolí V bodu x_0^3 a diferencovatelná funkce $g : U \rightarrow V$ tak, že $g(x_0^1, x_0^2) = x_0^3$ a pro každé $(x^1, x^2) \in U$ je $g(x^1, x^2)$ jediným bodem V , pro něž platí $F(x^1, x^2, g(x^1, x^2)) = 0$. Z uvedeného plyne, že $F^{-1}(0) \cap V$ je grafem funkce g , je tedy plochou podle předchozího Lemmatu. Protože tento postup lze provést pro každý bod $x \in F^{-1}(0)$, je $F^{-1}(0)$ plocha. \square

Příklady: Následující množiny jsou plochy v \mathbb{R}^3 :

- (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ - sféra,
- (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - elipsoid,
- (3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - jednodílný hyperboloid,
- (4) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ - eliptický paraboloid,
- (5) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ - hyperbolický paraboloid,
- (6) $z = \frac{x^2}{a^2}$ - parabolický válec,
- (7) $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ - torus ($a > b > 0$).

Pod uvedenými názvy rozumíme samozřejmě i obrazy výše zadaných ploch při libovolné shodnosti. Plochy 1-6 se nazývají *kvadriky*.

4.2. Křivky na ploše a tečný prostor.

Definice 4.5. *Křivkou na ploše $S \subset \mathbb{R}^3$ rozumíme regulární parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ s vlastností $\langle c \rangle \subset S$ (obraz křivky leží na ploše S).*

Pozn.: Leží-li regulární parametrizovaná křivka $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ na části plochy S pokryté obrazem jedné mapy f , pak zřejmě existuje regulární parametrizovaná křivka $u : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ taková, že $c = f \circ u$. (Stačí položit $u = f^{-1} \circ c$.) Platí pak

$$c'(t) = df(u(t))(u'(t)) = (u^1)'(t)f_{u^1}(u(t)) + (u^2)'(t)f_{u^2}(u(t)), \quad t \in I.$$

Definice 4.6. Řekneme, že vektor $v \in \mathbb{R}^3$ je *tečným vektorem* k ploše S v bodě $x \in S$, jestliže $v = o$ nebo existuje regulární parametrizovaná křivka $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$

na ploše S a bod $t_0 \in I$ takový, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množinu všech tečných vektorů plochy S v bodě x značíme $T_x S$.

Věta 4.5. *Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha a $x \in S$, pak $T_x S$ je dvourozměrný lineární podprostor v \mathbb{R}^3 . Je-li $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mapa plochy S s vlastností $f(u_0) = x$, pak vektory parciálních derivací $f_{u^1}(u_0)$, $f_{u^2}(u_0)$ tvoří bázi $T_x S$ a lineární zobrazení $df(u_0)$ je bijekcí \mathbb{R}^2 na $T_x S$.*

Důkaz. Ukážeme, že $T_x S$ je roven lineárnímu obalu vektorů $f_{u^1}(u)$ a $f_{u^2}(u)$. Protože tyto dva vektory jsou dle předpokladu nezávislé, bude tím důkaz ukončen.

Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $v = \alpha f_{u^1}(u_0) + \beta f_{u^2}(u_0)$, pak parametrizovaná křivka

$$c : t \mapsto f(u_0^1 + \alpha t, u_0^2 + \beta t), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

(pro dostatečně malé $\delta > 0$) je regulární, leží na ploše S a platí $c'(t) = v$, tedy $v \in T_x S$.

Je-li naopak $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka ležící v obrazu mapy f a s vlastností $c(t_0) = x$, pak $c = f \circ u$ pro regulární parametrizovanou křivku $u : I \rightarrow U$ a platí

$$c'(t_0) = df(u(t_0))u'(t_0) = (u^1)'(t_0)f_{u^1}(u_0) + (u^2)'(t_0)f_{u^2}(u_0),$$

tedy $c'(t_0)$ leží v lineárním obalu vektorů $f_{u^1}(u)$ a $f_{u^2}(u)$. \square

4.3. První fundamentální forma.

Definice 4.7. Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha a $x \in S$. Bilineární formu

$$I_x(X, Y) := X \cdot Y, \quad X, Y \in T_x S$$

na tečné rovině $T_x S$ nazveme *první fundamentální formou* plochy S v bodě x . Je-li $f : U \rightarrow S$ mapa plochy S s $f(u) = x$, pak vzor I_x při df_u je bilineární forma na \mathbb{R}^2 , kterou budeme značit

$$g_u(\xi, \zeta) = I_u(df_u(\xi), df_u(\zeta)) = df_u(\xi) \cdot df_u(\zeta), \quad \xi, \zeta \in \mathbb{R}^2.$$

g_u nazveme *první fundamentální formou* plochy v bodě u a její matici označíme rovněž

$$g_u = \left(g_u(e_i, e_j) \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} f_{u^1} \cdot f_{u^1} & f_{u^1} \cdot f_{u^2} \\ f_{u^2} \cdot f_{u^1} & f_{u^2} \cdot f_{u^2} \end{pmatrix}.$$

Pozn.: I_x je restrikcí skalárního součinu v \mathbb{R}^3 na $T_x S$, I_x i g_u jsou proto symetrické pozitivně definitní bilineární formy. Jak uvidíme dále, první fundamentální forma určuje metrické vlastnosti plochy.

Pozn.: Je zřejmé, že první fundamentální formu můžeme definovat i pro parametrizovanou plochu (nebož každá parametrizovaná plocha je lokálně mapou podle tvrzení 4.2).

Věta 4.6. *Buď $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha. Je-li $u : I \rightarrow U$ regulární křivka v $U \subseteq \mathbb{R}^2$, je $c = f \circ u$ regulární křivka na ploše f a její délka je*

$$L = \int_I \sqrt{g_u(u'(t), u'(t))} dt.$$

Důkaz. Vzorec pro délku plyne z Definice 2.2 a ze vztahu

$$c' = f_{u^1}(u^1)' + f_{u^2}(u^2)' = df_u(u').$$

\square

Věta 4.7. Je-li $f : U \rightarrow S$ mapa plochy S , pak plošný obsah části plochy $W \subset f(U) \subset S$ pokryté mapou f je roven

$$S(W) = \int_{f^{-1}(W)} \sqrt{\det g_u} \, du.$$

Důkaz. Vztah plyne z věty o substituci, neboť $\sqrt{\det g_u}$ je Jakobián zobrazení f v bodě u . (Viz přednáška Matematická analýza 4.) \square

Věta 4.8. Buď $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $\phi : V \rightarrow U$ změna parametru. Označme $\tilde{f} = f \circ \phi$ a \tilde{I}, \tilde{g} první fundamentální formu příslušnou \tilde{f} . Pak pro $v \in V$ platí

$$\tilde{g}_v(\xi, \zeta) = g_{\phi(v)}(d\phi_v(\xi), d\phi_v(\zeta)).$$

Důkaz. Rovnost plyne ze vztahu pro diferenciál složeného zobrazení

$$d\tilde{f}_v = df_{\phi(v)} \circ d\phi_v.$$

\square

Věta 4.9. Buď $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ shodnost. Označme $\bar{f} = S \circ f$ a \bar{g} první fundamentální formu příslušnou \bar{f} . Pak pro $u \in U$ platí

$$\bar{g}_u = g_u.$$

Důkaz. Podle pravidel derivování složeného zobrazení platí $d\bar{f}_u = S_0 \circ df_u$, kde $S_0(\cdot) = S(\cdot) - S(o)$ je lineární složka afinního zobrazení S . Protože S_0 zachovává skalární součin, dostaneme

$$\bar{g}_u(\xi, \zeta) = d\bar{f}_u(\xi) \cdot d\bar{f}_u(\zeta) = S_0(df_u(\xi)) \cdot S_0(df_u(\zeta)) = df_u(\xi) \cdot df_u(\zeta) = g_u(\xi, \zeta).$$

\square

4.4. Zobrazení mezi plochami.

Definice 4.8. Zobrazení $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$ mezi dvěma plochami se nazývá *lokální difeomorfismus*, jestliže pro libovolnou mapu $f_1 : U_1 \rightarrow S_1$ plochy S_1 a mapu $f_2 : U_2 \rightarrow S_2$ plochy S_2 takové, že $M := \Phi(f_1(U_1)) \cap f_2(U_2) \neq \emptyset$, je

$$f_2^{-1} \circ \Phi \circ f_1 : (\Phi \circ f_1)^{-1}(M) \rightarrow f_2^{-1}(M)$$

difeomorfismus.

Pozn.: $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$ je lokální difeomorfismus právě tehdy, když Φ lze rozšířit na regulární diferencovatelné zobrazení definované na nějakém otevřeném okolí plochy S_1 v \mathbb{R}^3 . (Regularitou zde rozumíme nenulovost Jakobiánu.) Lokální difeomorfismus nemusí být prosté zobrazení, ale je vždy lokálně prosté.

Definice 4.9. Lokální difeomorfismus $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$ mezi dvěma plochami se nazývá:

- *izometrie*, jestliže zachovává vzdálenosti, neboli délka libovolné křivky $c : I \rightarrow S_1$ na ploše S_1 je rovna délce jejího obrazu $\Phi \circ c(t) : I \rightarrow S_2$ na ploše S_2 ;
- *konformní*, jestliže zachovává úhly, neboli pro libovolné dvě křivky $c : I \rightarrow S_1$ a $d : J \rightarrow S_1$ na ploše S_1 protínající se v bodě $x = c(s) = d(t)$ pod úhlem α (tedy α je úhel tečných vektorů $c'(s)$ a $d'(t)$), jejich obrazy $\Phi \circ c : I \rightarrow S_2$ a $\Phi \circ d : J \rightarrow S_2$ se protínají v bodě $\Phi(x) = \Phi(c(s)) = \Phi(d(t))$ rovněž pod úhlem α ;

- zachovává velikosti ploch, jestliže pro libovolnou měřitelnou oblast $W \subset S_1$, plošný obsah oblasti W je roven plošnému obsahu obrazu $\Phi(W)$.

Dvě plochy S_1, S_2 nazveme izometrické, jestliže existuje izometrie S_1 na S_2 .

Pozn.: Zřejmě každá izometrie je konformní a zachovává velikosti ploch.

Věta 4.10. *Mějme lokální difeomorfismus $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$ mezi dvěma plochami. Je-li $f : U \rightarrow S_1$ mapa plochy S_1 , pak $\tilde{f} := \Phi \circ f : U \rightarrow S_2$ je mapa plochy S_2 a platí:*

- Φ je izometrie právě tehdy, když pro každou mapu f plochy S_1 , první fundamentální formy map f a \tilde{f} splývají: $g = \tilde{g}$ na U .
- Φ je konformní právě tehdy, když pro každou mapu f plochy S_1 , první fundamentální formy map f a \tilde{f} splňují: $g = \lambda \tilde{g}$ na U pro nějakou kladnou funkci λ na U .
- Φ zachovává velikosti ploch právě tehdy, když pro každou mapu f plochy S_1 , první fundamentální formy map f a \tilde{f} splňují: $\det g = \det \tilde{g}$ na U .

Důkaz. Nechť je splněna podmínka v (i) a nechť $c = f \circ u$ je křivka na ploše S_1 , jejíž obraz leží v části plochy pokryté mapou f . Pak podle věty 4.6 je délka křivky c shodná s délkou obrazu $\Phi \circ c$ na S_2 . Z toho již zřejmě plyne, že Φ zachovává délky (všech) křivek, a tedy je izometrií.

Nechť naopak neplatí podmínka z (i) a nechť $f : U \rightarrow S_1$ je mapa a $u_0 \in U$ takový, že $g_{u_0} \neq \tilde{g}_{u_0}$. Je známo, že pozitivně definitní bilineární forma je jednoznačně určena svou kvadratickou formou, tedy musí existovat $\xi \neq 0$ v \mathbb{R}^2 takový, že $g_{u_0}(\xi, \xi) \neq \tilde{g}_{u_0}(\xi, \xi)$. Nechť například

$$g_{u_0}(\xi, \xi) < \tilde{g}_{u_0}(\xi, \xi).$$

Ze spojitosti g a \tilde{g} musí existovat $\delta > 0$ takové, že

$$g_{u_0+t\xi}(\xi, \xi) < \tilde{g}_{u_0+t\xi}(\xi, \xi), \quad |t| < \delta,$$

a tedy také

$$\int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{g_{u_0+t\xi}(\xi, \xi)} dt < \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{\tilde{g}_{u_0+t\xi}(\xi, \xi)} dt.$$

To ale podle věty 4.6 znamená, že délka regulární parametrizované křivky $c : t \mapsto f(u_0 + t\xi)$, $t \in (-\delta, \delta)$, je menší než délka jejího obrazu $\Phi \circ c$, a tedy Φ není izometrie.

Body (ii) a (iii) lze dokázat obdobně. □

Příklady:

- Zobrazení $\Phi : (x, z) \mapsto (r \cos \frac{x}{r}, r \sin \frac{x}{r}, z)$ je izometrie roviny $S_1 = \{y = 0\}$ na plášť válce $S_2 = \{x^2 + y^2 = r^2\}$.
- Existuje izometrické zobrazení pláště kužele $S_1 = \{x^2 + y^2 = az^2, z \neq 0\}$ do roviny.
- Šroubová plocha s parametrizací

$$f_1(u^1, u^2) = (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, au^1), \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2,$$

je izometrická katenoidu

$$f_2(v^1, v^2) = a(\cosh v^2 \cos v^1, \cosh v^2 \sin v^1, v^2), \quad (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2$$

(změna parametru $u^1 = v^1, u^2 = a \sinh v^2$).

- (4) Stereografická projekce roviny $\{z = 0\}$ do sféry $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (bez “severního pólu”) je konformní zobrazení. (Stereografická projekce je zobrazení Φ , které bodu $(u, v, 0)$ přiřadí průsečík sféry s přímkou procházející body $(u, v, 0)$ a $(0, 0, 1)$, tedy

$$\Phi : (u, v, 0) \mapsto \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

4.5. Normála a druhá fundamentální forma.

Definice 4.10. Dvě mapy $f_1 : U_1 \rightarrow S$, $f_2 : U_2 \rightarrow S$ plochy S s $f_1(U_1) \cap f_2(U_2) \neq \emptyset$ nazveme *souhlasně orientované*, jestliže přechodové zobrazení $f_2^{-1} \circ f_1$ má kladný determinant matice parciálních derivací. Soubor map, které pokrývají celou plochu S , nazveme *atlasem* plochy. Plochu S nazveme *orientovanou plochou*, jestliže existuje atlas, v němž každé dvě mapy s neprázdným průnikem obrazů jsou souhlasně orientované. Libovolná takový atlas určuje orientaci plochy.

Definice 4.11. Buď S orientovaná plocha a $x \in S$. Buď $f : U \rightarrow S$ libovolná mapa atlasu orientované plochy taková, že $x = f(u)$ pro nějaké $u \in U$, a položme

$$N(x) = \frac{f_{u^1}(u) \times f_{u^2}(u)}{\|f_{u^1}(u) \times f_{u^2}(u)\|}.$$

Jednotkový vektor $N(x) \perp T_x S$ se nazývá *normálový vektor plochy* v bodě x ; zřejmě nezávisí na volbě mapy f , zobrazení $N : x \mapsto N(x)$ na orientované ploše S je tedy dobře definováno a nazývá se *Gaussovo zobrazení*.

Lemma 4.11. *Je-li S orientovaná plocha a $f : U \rightarrow S$ mapa, pak pro každé $u \in U$ je složené zobrazení $n := N \circ f$ diferencovatelné a platí $dn_u(\mathbb{R}^2) \subseteq T_{f(u)} S$.*

Důkaz: Derivováním rovnosti $n(u) \cdot n(u) = 1$.

Definice 4.12. Buďte S orientovaná plocha, $x \in S$ a $f : U \rightarrow S$ mapa taková, že $x = f(u)$ pro $u \in U$. Označme $n = N \circ f$.

- (1) Lineární zobrazení $L_x = -dn_u \circ (df_u)^{-1}$ z $T_x S$ do $T_x S$ se nazývá *Weingartenovo zobrazení*.
- (2) Bilineární forma $II_x(X, Y) = (L_x X) \cdot Y$ na $T_x S$ se nazývá *druhá fundamentální forma plochy* v bodě x . Její vzor při df_u značíme

$$h_u(\xi, \zeta) = II_u(df_u(\xi), df_u(\zeta)) = -dn_u(\xi) \cdot df_u(\zeta),$$

což je bilineární forma na \mathbb{R}^2 s maticí

$$h_u = \begin{pmatrix} -n_{u^1} \cdot f_{u^1}, & -n_{u^1} \cdot f_{u^2} \\ -n_{u^2} \cdot f_{u^1}, & -n_{u^2} \cdot f_{u^2} \end{pmatrix}.$$

Pozn. Je snadné ověřit, že L_x nezávisí na volbě mapy f atlasu orientované plochy.

Věta 4.12. h_u , a tedy i II_x , je symetrická bilineární forma.

Důkaz: Z rovnosti $f_{u^1} \cdot n = 0$ dostaneme $d(f_{u^1} \cdot n)_u(e_2) = 0$, tedy $d(f_{u^1})_u(e_2) \cdot n + f_{u^1} \cdot dn_u(e_2) = 0$, z čehož plyne

$$-f_{u^1} \cdot n_{u^2} = f_{u^1, u^2} \cdot n$$

(značíme $f_{u^i, u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$). Podobně odvodíme i $-f_{u^2} \cdot n_{u^1} = f_{u^2, u^1} \cdot n$, a ze záměnnosti smíšených derivací plyne $-f_{u^2} \cdot n_{u^1} = -f_{u^1} \cdot n_{u^2}$.

Pozn.: Z důkazu poslední věty je vidět, že matici druhé fundamentální formy lze vyjádřit ve tvaru

$$h_u = \begin{pmatrix} n \cdot f_{u^1, u^1} & n \cdot f_{u^1, u^2} \\ n \cdot f_{u^1, u^2} & n \cdot f_{u^2, u^2} \end{pmatrix}.$$

Věta 4.13. *Bud' $f : U \rightarrow S$ mapa orientované plochy S a $\phi : V \rightarrow U$ změna parametru zachovávající orientaci. Pro druhou fundamentální formu mapy $\tilde{f} = f \circ \phi$ platí*

$$\tilde{h}_v(\xi, \zeta) = h_{\phi(v)}(d\phi_v(\xi), d\phi_v(\zeta)), \quad v \in V.$$

Věta 4.14. *Bud' S orientovaná plocha s atlasem \mathcal{A} a $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ shodnost. Pak $\bar{S} := A(S)$ je rovněž plocha a $\{A \circ f : f \in \mathcal{A}\}$ její atlas určující orientaci. Pro normálu \bar{N} orientované plochy \bar{S} platí*

$$\bar{N}(Ax) = \pm LN(x), \quad x \in S,$$

kde L le lineární komponenta S a $\pm = \det L$. Je-li $f : U \rightarrow S$ mapa z atlasu \mathcal{A} a $\bar{f} := A \circ f$ příslušná mapa $A(S)$, pak příslušné druhé fundamentální formy h, \bar{h} splňují

$$\bar{h}_u = \pm h_u.$$

Důkaz. Využijeme následující vlastnosti shodnosti: její lineární složka $L(\cdot) = A(\cdot) - A(o)$ komutuje s vektorovým součinem až na změnu znaménka, tj. pro $u, v \in \mathbb{R}^3$ platí $L(u) \times L(v) = \pm L(u \times v)$, se znaménkem $+$, jedná-li se o přímou shodnost (ověří se z definice vektorového součinu). V důsledku této vlastnosti je pak $\bar{n}(u) = \pm L(n(u))$, a tedy

$$\bar{h}_u(\xi, \zeta) = -d\bar{n}_u(\xi) \cdot d\bar{f}_u(\zeta) = -\pm L(dn_u(\xi)) \cdot L(df_u(\zeta)) = \mp dn_u(\xi) \cdot df_u(\zeta) = \pm h_u(\xi, \zeta).$$

□

Příklady:

- (1) Bud' $S = \{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2\}$ sféra o poloměru $r > 0$. Pak je zřejmě $N(x) = \pm r^{-1}x$ a pro libovolnou mapu f zobrazení $n = N \circ f$ splňuje $dn_u = \pm r^{-1}df_u$, tedy $L_u(X) = -dn_u \circ (df_u)^{-1}(X) = \pm r^{-1}X$ a

$$II_x(X, Y) = \pm r^{-1}X \cdot Y$$

(znaménko závisí na orientaci sféry).

- (2) Je-li $S\{(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2\}$ plášť válce, máme $N(x) = \pm r^{-1}\Pi(x)$, kde Π je kolmá projekce do roviny $\{x^3 = 0\}$. Pro mapu f a $n = N \circ f$ pak platí $n(u) = \pm r^{-1}\Pi(f(u))$, $dn_u = \pm r^{-1}\Pi \circ df_u$, $L_x(X) = \pm r^{-1}\Pi(X)$ a

$$II_x(X, Y) = \pm r^{-1}\Pi(X) \cdot Y.$$

4.6. Hlavní směry a hlavní křivosti plochy. Mezi křivostí křivky na ploše a druhou fundamentální formou plochy ve směru tečny křivky platí následující důležitý vztah.

Věta 4.15. *Bud' S orientovaná plocha a $c : I \rightarrow S$ křivka na ploše S parametrizovaná obloukem. Symboly $\mathbf{t}(s), \kappa(s)$ značíme vektor tečny a křivost křivky, $\mathbf{n}(s)$ je vektor hlavní normály v případě $\kappa(s) \neq 0$ v bodě $s \in I$. Pak platí*

$$II_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)) = \kappa(s) (N(c(s)) \cdot \mathbf{n}(s)), \quad s \in I.$$

Pozn.: Je-li $\kappa(s) = 0$, výraz na pravé straně je roven nule a nevádí tedy, že vektor hlavní normály křivky není definován.

Důkaz. Buď $f : U \rightarrow S$ mapa a $u : I' \rightarrow U$ regulární parametrizovaná křivka taková, že $s \in I'$ a $c = f \circ u$ na I' . Platí

$$\begin{aligned} II_{c(s)}(c'(s), c'(s)) &= h_{u(s)}(u'(s), u'(s)) \\ &= -dn_{u(s)}(u'(s)) \cdot df_{u(s)}(u'(s)) \\ &= -(n \circ u)'(s) \cdot c'(s) \\ &= (n \circ u)(s) \cdot c''(s) \\ &= \kappa(s) N(c(s)) \cdot \mathbf{n}(s), \end{aligned}$$

přítom třetí rovnost dostaneme derivováním rovnosti $(n \circ u) \cdot c' = 0$. □

Důsledkem je vztah známý jako Meusnierova věta:

Věta 4.16 (Meusnier). *Nechť S a c jsou jako v předchozí větě a označme $\theta(s) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ úhel mezi normálou $N(c(s))$ k ploše a oskulační rovinou křivky c v bodě s . Pak*

$$|II_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s))| = \kappa(s) \cos \theta(s), \quad s \in I.$$

Definice 4.13. S buď orientovaná plocha, $x \in S$, $o \neq X \in T_x S$. Pak číslo

$$k_N(X) = \frac{II_x(X, X)}{I_x(X, X)}$$

nazveme *normálovou křivostí* plochy v bodě x a ve směru X .

Pozn.:

- (1) Zřejmě platí $k_N(\alpha X) = k_N(X)$ pro každé $\alpha \neq 0$, k_N je tedy skutečně funkcí ‘směru’ $\langle X \rangle = \{\alpha X : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- (2) Z Meusnierovy věty plyne, že $|k_N(X)|$ je křivost křivky ležící v řezu plochy rovinou $\langle X, n(u) \rangle$ v bodě $f(u)$.

Zvolme $x \in S$ pevně a označme

$$\mathbb{S}_x S = \{X \in T_x S : \|X\| = 1\}.$$

Funkci k_N můžeme přirozeně chápat jako funkci na $\mathbb{S}_x S$; jako spojitá funkce na kompaktu zde musí nabývat minima a maxima.

Definice 4.14. $X \in \mathbb{S}_x S$ (resp. $\langle X \rangle$) je *hlavním směrem* plochy S v bodě x , jestliže k_N nabývá extrému v X . Hodnota $k_N(X)$ se pak nazývá *hlavní křivostí* plochy v bodě x .

Pozn.: X je hlavní směr, právě když $-X$ je hlavní směr.

Hledání hlavních směrů a hlavních křivostí: Jedná se o úlohu na vázaný extrém

$$\min / \max \{II_x(X, X) : I_x(X, X) = 1\}.$$

Je-li $f : U \rightarrow S$ mapa plochy s $f(u) = x$, pak lze ekvivalentně úlohu převést na hledání extrému ($\xi \in \mathbb{R}^2$)

$$\min / \max \{h_u(\xi, \xi) : g_u(\xi, \xi) = 1\}.$$

Metodou Lagrangeových multiplikátorů se úloha převede na hledání nevázaného extrému funkce

$$\Lambda(\xi, \lambda) = h_u(\xi, \xi) - \lambda(g_u(\xi, \xi) - 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Funkce Λ je diferencovatelná, pokud tedy nabývá v (ξ, λ) extrému, musí platit

$$d\Lambda_{(\xi, \lambda)}(\eta, 0) = 2h_u(\xi, \eta) - 2\lambda g_u(\xi, \eta) = 0 \quad \text{pro všechna } \eta \in \mathbb{R}^2,$$

v maticovém zápisu

$$\eta^T (h_u - \lambda g_u) \xi = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Poslední podmínka nastane, právě když

$$(1) \quad (h_u - \lambda g_u) \xi = 0,$$

což může nastat jedině když

$$(2) \quad \det(h_u - \lambda g_u) = 0.$$

Věta 4.17. Jsou-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dvě řešení (2) a ξ_1, ξ_2 odpovídající řešení (1), platí $g_u(\xi_1, \xi_2) = 0$ (neboli hlavní směry odpovídající různým hlavním křivostem jsou vzájemně kolmé). Hlavní směry $X_i = df_u(\xi_i)$ jsou vlastními vektory Weingartenova zobrazení L_x s vlastními čísly λ_i :

$$L_u(X_i) = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2.$$

Hodnoty λ_i jsou extrémními hodnotami normálové křivosti ve směrech X_i .

Důkaz. Odečtením rovnic (důsledek (1))

$$\begin{aligned} \xi_2^T (h_u - \lambda_1 g_u) \xi_1 &= 0, \\ \xi_1^T (h_u - \lambda_2 g_u) \xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z (1) dále odvodíme

$$II_x(X_i, Y) = \lambda_i I_x(X_i, Y), \quad Y \in T_x S,$$

z čehož plyne $L_x X_i = \lambda_i X_i$ a $k_N(X_i, X_i) = \lambda_i$. □

Mohou nastat tyto případy:

- (1) Rovnice (2) má jediné řešení λ_1 , pak $\lambda_1 = k_N(X)$ pro všechna $X \in \mathbb{S}_x S$ (každý směr je hlavním směrem):
 - (a) $\lambda_1 = 0$, x je *planární bod* plochy,
 - (b) $\lambda_1 \neq 0$, x je *kruhový bod* plochy.
- (2) Rovnice (2) má dvě řešení $\lambda_1 < \lambda_2$, odpovídající hlavní směry X_1, X_2 ($X_i = df_u(\xi_i)$) jsou navzájem kolmé:
 - (a) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, x je *eliptický bod* plochy,
 - (b) $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, x je *parabolický bod* plochy,
 - (c) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, x je *hyperbolický bod* plochy.

Definice 4.15. Funkce $K(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)$ se nazývá *Gaussova křivost* a $H(x) = \frac{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}{2}$ *střední křivost* plochy. (Je-li jediná hlavní křivost, klademe $\lambda_2 = \lambda_1$.)

Věta 4.18. Platí následující vzorce pro výpočet Gaussovy a střední křivosti pomocí matic první a druhé fundamentální formy:

$$(3) \quad K(f(u)) = \frac{\det h_u}{\det g_u},$$

$$(4) \quad H(f(u)) = \frac{g_u^{11} h_u^{22} + g_u^{22} h_u^{11} - 2g_u^{12} h_u^{12}}{2\det g_u}$$

Důkaz: Vzorce se odvodí přímo z (2).

Řekneme, že funkce $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ na ploše S je *diferencovatelná*, jestliže $h \circ f$ je diferencovatelná na U pro libovolnou mapu $f : U \rightarrow S$.

Důsledek: K, H jsou diferencovatelné funkce na U .

Lemma 4.19. *Je-li $\lambda_1(x_0) \neq \lambda_2(x_0)$, pak existuje okolí V bodu x_0 a funkce λ_1, λ_2 diferencovatelné na $S \cap V$ takové, že $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ jsou hlavní křivosti plochy v bodě x pro každý $x \in S \cap V$.*

Důkaz. Zvolme mapu $f : U \rightarrow S$ s $f(u_0) = x_0$. Aplikujeme větu o implicitních funkcích pro funkci

$$\Phi(\lambda, u) = \lambda^2 - 2H(f(u))\lambda + K(f(u)) = 0.$$

Podmínka $\lambda_1(u_0) \neq \lambda_2(u_0)$ zaručuje, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda_i, u_0) = 2(\lambda_i(u_0) - H(u_0)) \neq 0.$$

□

Věta 4.20. *Bud' S orientovaná plocha a $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ shodnost. Pak pro křivosti orientované plochy $\bar{S} = A(S)$ platí ($u \in U$)*

$$\bar{K}(Ax) = K(x), \quad \bar{H}(Ax) = \pm H(x).$$

Poznámka: Je-li f parametrizovaná plocha a $u_0 \in U$ pevný, lze vždy plochu $f(U)$ na okolí bodu u_0 parametrizovat jako graf funkce nad tečnou rovinou $T_{u_0}f$. Přesněji: Nechť (bez újmy na obecnosti) je $f(u_0) = 0$, $T_{u_0}f = \{z = 0\}$, $n(u_0) = e_3$. Pak existuje okolí U_0 bodu u_0 , okolí V_0 počátku v rovině $\{z = 0\}$ a diferencovatelná funkce $h : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $dh_0 = 0$ a graf $h = f(U_0)$ (použijte větu o implicitních funkcích). Proto následující tvrzení je dostatečně obecné.

Lemma 4.21. *Bud' h diferencovatelná funkce definovaná na okolí počátku v \mathbb{R}^2 s $h(0,0) = 0$ a $dh_{(0,0)} = 0$. Pak $f : u \mapsto (u, h(u))$ je parametrizovaná plocha, a označíme-li λ_1, λ_2 její hlavní křivosti v bodě $(0,0)$, a při volbě souřadnic x, y ve směru hlavních směrů X_1, X_2 , platí*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = \lambda_1, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0) = \lambda_2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Tedy grafem Taylorova polynomu druhého řádu funkce h v počátku je kvadratika $z = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2)$, což je:

- (1) rovina v případě $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,
- (2) rotační paraboloid v případě $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$,
- (3) eliptický paraboloid v případě $\lambda_1 \lambda_2 > 0$,
- (4) parabolický válec v případě $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2 = 0$,
- (5) hyperbolický paraboloid v případě $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Důkaz: Z definice druhé fundamentální formy a hlavních směrů a křivostí dostaneme

$$d^2 h_{(0,0)}(\xi_i, \xi_j) = d^2 f_{(0,0)}(\xi_i, \xi_j) \cdot n(0,0) = \Pi_{(0,0)}(X_i, X_j) = L_{(0,0,0)}(X_i) \cdot X_j = \lambda_i (X_i \cdot X_j),$$

přítom $X_i \cdot X_j = \delta_{ij}$ a hlavní směry ξ_i, ξ_j splývají s vektory kanonické báze e_1, e_2 .

Definice 4.16.

- (1) Křivky $u^1 \mapsto f(u^1, u^2)$ (u^2 pevné) a $u^2 \mapsto f(u^1, u^2)$ (u^1 pevné) se nazývají *parametrické křivky* mapy $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- (2) Křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S je *hlavní křivkou*, jestliže $c'(t)$ je hlavním směrem pro každé $t \in I$. Křivka na ploše je hlavní, právě když vyhovuje diferenciální rovnici

$$(5) \quad (h_{u(t)} - \lambda_i(u(t))g_{u(t)})u'(t) = 0, \quad t \in I.$$

Věta 4.22. *Buď $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha.*

- (1) *Parametrické křivky jsou hlavními křivkami, právě když matice první i druhé fundamentální formy jsou diagonální, tj. když $g_u^{12} = h_u^{12} = 0$ pro $u \in U$.*
- (2) *Ke každému $u \in U$ takovému, že $\lambda_1(u) \neq \lambda_2(u)$, existuje okolí U_0 a změna parametru $\phi : V \rightarrow U_0$ tak, že parametrické křivky plochy $\tilde{f} = f \circ \phi$ jsou zároveň hlavními křivkami.*

(bez důkazu)

4.7. Asymptotické směry a asymptotické křivky.

Definice 4.17. $\langle X \rangle \subseteq T_x f$ je *asymptotický směr* plochy S v bodě $x \in S$, jestliže $\Pi_x(X, X) = 0$ pro každý $X \in \langle X \rangle$ (asymptotickým směrem budeme nazývat i každý takový vektor X). Analogicky $\xi \in \mathbb{R}^2$ je asymptotický směr mapy $f : U \rightarrow S$ plochy v bodě u , jestliže $h_u(\xi, \xi) = 0$.

Křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S je *asymptotická křivka*, jestliže $c'(t)$ je asymptotický směr pro každé $t \in I$. Asymptotická křivka vyhovuje diferenciální rovnici

$$(6) \quad h_{u(t)}(u'(t), u'(t)) = 0, \quad t \in I,$$

kde $f : U \rightarrow S$ je mapa plochy S a $c = f \circ u$.

Věta 4.23. *Buď S plocha a $x \in S$.*

- (1) *Je-li $K(x) > 0$, neexistuje v x žádný asymptotický směr.*
- (2) *Je-li $K(x) < 0$, existují v x právě dva různé asymptotické směry.*
- (3) *Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) \neq \lambda_2(x)$, existuje v x právě jeden asymptotický směr, který je zároveň hlavním směrem.*
- (4) *Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) = \lambda_2(x)$, je v x každý směr asymptotický.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definic. Využívá faktu, že normálová křivost nabývá na jednotkové kružnici nejvýše dvou lokálních extrémů ve dvou na sebe kolmých směrech. \square

4.8. Přímkové plochy.

Definice 4.18. Parametrizovaná plocha $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ se nazývá *přímková (parametrizovaná) plocha*, jestliže existuje regulární křivka $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a diferencovatelné zobrazení $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ tak, že $U \subseteq I \times \mathbb{R}$ a

$$f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 X(u^1), \quad (u^1, u^2) \in U.$$

Je-li navíc $n_{u^2} = 0$ na U (normálové pole je konstantní podél generátorů), nazveme f *rozvinutelnou*.

Plochu $S \subseteq \mathbb{R}^3$ nazveme *přímkovou (rozvinutelnou) plochou*, jestliže existuje atlas tvořený přímkovými (rozvinutelnými) plochami.

Věta 4.24. *Buď $f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 X(u^1)$ přímková parametrizovaná plocha.*

- (1) *Přímky $u^1 = \text{const.}$ (generátory) jsou asymptotickými křivkami.*
- (2) *$K(u) \leq 0$, $u \in U$.*
- (3) *f je rozvinutelná, právě když $K(u) = 0$, $u \in U$.*

Důkaz:

- (1) Plyne z $II(f_{u^2}, f_{u^2}) = N \cdot f_{u^2, u^2} = 0$.
- (2) Z předchozí úvahy dostáváme $h^{22} = 0$, tedy $K = -\frac{(h^{12})^2}{\det g} \leq 0$.
- (3) Protože $n_{u^2} \cdot f_{u^2} = 0$, platí

$$n_{u^2} = 0 \iff n_{u^2} \cdot f_{u^1} = 0 \iff n \cdot f_{u^1 u^2} = 0 \iff h^{12} = 0 \iff K = 0.$$

Příklady:

- (1) Plocha tečen obecné regulární parametrizované křivky

$$f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 c'(u^1)$$

je rozvinutelná parametrizovaná plocha.

- (2) Zobecněná válcová plocha

$$f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 X$$

je rozvinutelná parametrizovaná plocha.

- (3) Šroubová plocha

$$f(u^1, u^2) = (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, au^1)^T \quad (a > 0)$$

je přímková parametrizovaná plocha, která není rozvinutelná.

- (4) Jednodílný hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ je přímková plocha (parametrizace $f(u^1, u^2) = (\cos u^2 - u^1 \sin u^2, \sin u^2 + u^1 \cos u^2, u^1)^T$).

4.9. Geodetiky na ploše.

Motivace. Mějme orientovanou plochu S a regulární parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow S$ na ploše S . Hledáme podmínky zaručující, že křivka c spojuje nejkratším možným způsobem libovolné své dva různé dostatečně blízké body. Buď $f : U \rightarrow S$ mapa plochy a $c = f \circ u$ vyjádření křivky c na části plochy pokryté mapou f . Pozměníme málo křivku c na okolí nějakého bodu $x = c(t)$ výchylkou ve směru tečném k ploše a kolmém k tečně křivky:

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon \alpha(t)(c'(t) \times N(c(t))),$$

kde $N(t) = n(u(t))$, $\varepsilon > 0$ malé a $\alpha(t)$ je libovolná nezáporná diferencovatelná funkce. Délka části křivky c_ε je $\int_I \|c'_\varepsilon\|$. Chceme, aby tato délka byla minimální pro $\varepsilon = 0$ při libovolné volbě funkce α , což znamená podmínku

$$\frac{d}{d\varepsilon} \|c'_\varepsilon\| \Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

$\alpha \geq 0$ libovolná. Máme

$$c'_\varepsilon = c' + \varepsilon \alpha'(c' \times (N \circ c)) + \varepsilon \alpha(c'' \times (N \circ c)) + \varepsilon \alpha(c' \times (N \circ c)'),$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \|c'_\varepsilon\| \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{c' \cdot (\alpha'(c' \times (N \circ c)) + \alpha(c'' \times (N \circ c)) + \alpha(c' \times (N \circ c)'))}{\|c'\|} \\ &= \frac{\alpha}{\|c'\|} \{c', c'', N \circ c\}. \end{aligned}$$

Poslední výraz je roven 0 pro libovolnou α , právě když smíšený součin $\{c', c'', N\} = 0$.

Definice 4.19. Regulární křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S se nazývá *geodetikou*, jestliže

$$\det(c'(t), c''(t), N(c(t))) = 0 \text{ pro každé } t \in I.$$

Pozn.: Vlastnost křivky ‘být geodetikou na ploše’ je zřejmě invariantní vůči změně parametru křivky i plochy.

Příklady.

- (1) V rovině jsou geodetiky právě všechny přímky. Část přímky je geodetikou na libovolné ploše.
- (2) Na jednotkové sféře $\{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ jsou geodetiky právě všechny hlavní kružnice, tj. kružnice maximálního poloměru r .
- (3) Na válcové ploše $\{x^2 + y^2 = 1\}$ parametrizované mapou

$$f(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)^T$$

jsou geodetiky ‘spirály’ parametrizované např. $u^1 = \alpha_1 t + \beta_1$, $u^2 = \alpha_2 t + \beta_2$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ (tyto křivky odpovídají přímčkám po ‘rozbalení’ plochy do roviny).

Definice 4.20. Buď S orientovaná plocha a $c : I \rightarrow S$ regulární křivka na ploše S . *Geodetickou křivost* křivky c definujeme předpisem

$$k_g(t) = \det(c'(t), c''(t), N(c(t))), \quad t \in I.$$

Poznámky:

- (1) Z následující věty vyplyne, že absolutní hodnota geodetické křivosti nezávisí na parametrizaci plochy ani křivky. Znaménko geodetické křivosti lze změnit změnou orientace jak křivky, tak plochy.
- (2) Z definice je zřejmé, že křivka c je geodetikou, právě když její geodetická křivost je nulová.

Pro ‘obyčejnou’ křivost křivky v \mathbb{R}^3 parametrizované obloukem platí $\kappa(s) = \|c''(s)\|$. Z definice geodetické křivosti snadno odvodíme následující tvrzení.

Věta 4.25. Pro regulární křivku $c : I \rightarrow S$ na ploše S parametrizovanou obloukem ($\|c'\| = 1$) platí

$$|k_g(s)| = \kappa(s) \sin \theta(s), \quad s \in I,$$

kde $\kappa(s)$ je křivost křivky c v \mathbb{R}^3 a $\theta(s) \in [0, \pi/2]$ je úhel mezi normálou plochy a oskulační rovinou křivky v neinflexním bodě t křivky.

Důkaz. Z definice geodetické křivosti a z Frenetových vzorců pro křivku dostaneme

$$\begin{aligned} |k_g(s)| &= |\det(c'(s), c''(s), N(c(s)))| \\ &= |\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), N(c(s)))| \\ &= \kappa(s) |\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), N(c(s)))| \\ &= \kappa(s) |\mathbf{b}(s) \cdot N(c(s))| \\ &= \kappa(s) \sin \theta(s). \end{aligned}$$

□

Využijeme-li Meusnierovu větu (Důsledek 4.16) a nezávislost křivosti na parametrizaci, dostáváme

Důsledek 4.26. Pro regulární křivku $c : I \rightarrow S$ na ploše S platí následující vztah mezi obyčejnou a geodetickou křivostí křivky a normálovou křivostí plochy:

$$\kappa^2(t) = k_N^2(c'(t)) + k_g^2(t), \quad t \in I.$$

Na závěr uvedeme ještě větu o existenci geodetik zadaných vlastností. K důkazu, který neuvádíme, je třeba použít věty o řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic.

Věta 4.27. *Bud' S plocha, $x \in U$.*

- (1) *Ke každému vektoru $o \neq X \in T_x S$ existuje (až na změnu parametru) právě jedna geodetika $c : I \rightarrow S$ taková, že $c(0) = x$ a $c'(0) = X$.*
- (2) *Existuje okolí V_0 bodu x tak, že každá geodetika $c : I \rightarrow S$ na ploše S s $c(I) \subseteq V_0$ je nejkratší spojnici na ploše libovolných dvou svých bodů (jinými slovy, délka libovolné křivky na ploše spojující dva body $c(a), c(b)$, $a, b \in I$, je větší nebo rovna délce geodetiky $c \mid [a, b]$ a rovnost nastává pouze v případě, kdy obrazy obou křivek splývají).*

Poznámka: Tvzení 2. skutečně platí jen lokálně: z příkladu válcové plochy je zřejmé, že libovolné dva její body, které neleží na společné 'rovnoběžce' (kružnici kolmé k ose válce), lze spojit nekonečně mnoha geodetickými křivkami ('spirálami') libovolně velké délky.

Cvičení:

- (1) Uvažujte torus, který vznikne rotací kružnice $(x - a)^2 + z^2 = b^2$, $y = 0$ kolem osy z ($a > b > 0$). Určete, které kružnice na toru jsou geodetickými (asymptotickými, hlavními) křivkami.
- (2) Ukažte, že křivka na ploše, která je hlavní i geodetickou křivkou, je křivkou rovinnou.
- (3) Ukažte, že křivka na ploše, která je asymptotickou i geodetickou křivkou, je částí přímky.
- (4) Ukažte, že každá regulární parametrizovaná křivka v \mathbb{R}^3 je geodetickou křivkou na ploše svých binormál.

5. RIEMANNOVA GEOMETRIE, MODELY HYPERBOLICKÉ GEOMETRIE

Dosud jsme studovali plochy v \mathbb{R}^3 , jejichž geometrie byla dána polohou v trojrozměrném prostoru. Metrické vlastnosti plochy vyplývaly z první fundamentální formy, která je dána jako restrikce euklidovského skalárního součinu do tečné roviny v daném bodě.

Riemannova geometrie je zobecněním v tom smyslu, že první fundamentální formu v bodě definujeme předpisem, bez ohledu na vnoření plochy do většího prostoru. V této kapitole budeme nadále vycházet z množiny bodů tvořící plochu v \mathbb{R}^3 , i když obecný přístup připouští mnohem obecnější struktury.

Definice 5.1. Nechť S je plocha v \mathbb{R}^3 . *Riemannovou metrikou* na S rozumíme zobrazení

$$g : x \mapsto g_x, \quad x \in S,$$

kde g_x je symetrická pozitivně definitní bilineární forma na tečném prostoru $T_x S$, které je navíc hladké v tom smyslu, že pro každou mapu $f : U \rightarrow S$ plochy S je zobrazení

$$u \mapsto g_{f(u)}(df_u(\cdot), df_u(\cdot)), \quad u \in U,$$

diferencovatelným zobrazením z U do množiny pozitivně definitních bilineárních forem na \mathbb{R}^2 .

Pozn.: Definice i věty z podkapitol 4.3 a 4.4 lze aplikovat i pro případ plochy s Riemannovou geometrií. Speciálně platí vzorec z věty 4.6 pro délku křivky na ploše a definice 4.9 izometrického a konformního zobrazení mezi plochami.

Definice 5.2. Na ploše

$$H_2 := \{-x^2 - y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

(horní list dvoudílného hyperboloidu) je dána Riemannova metrika

$$g_{(x,y,z)}^{(H_2)}((X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)) = X_1X_2 + Y_1Y_2 - Z_1Z_2, \\ (X_i, Y_i, Z_i) \in T_{(x,y,z)}H_2, i = 1, 2.$$

Cvičení: Ověřte, že $g_{(x,y,z)}^{(H_2)}$ je pozitivně definitní bilineární forma na $T_{(x,y,z)}H_2$ pro každý bod $(x, y, z) \in H_2$.

Definici plochy v \mathbb{R}^3 vyhovuje i otevřená podmnožina \mathbb{R}^2 , jak tomu bude v následujících dvou příkladech.

Definice 5.3. Množina

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

s Riemannovou metrikou

$$g_{(u,v)}^{(U)} = \begin{pmatrix} 4(1 - u^2 - v^2)^{-2} & 0 \\ 0 & 4(1 - u^2 - v^2)^{-2} \end{pmatrix}$$

(bilineární forma na \mathbb{R}^2 je reprezentována maticí) se nazývá *Poincarého model hyperbolické geometrie*.

Věta 5.1. Zobrazení $\Phi : U \rightarrow H_2$ dané předpisem

$$\Phi : (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2} \right)$$

je izometrické zobrazení U na H_2 (vzhledem k příslušným Riemannovým geometriím).

Pozn.: Zobrazení Φ je stereografická projekce z bodu $(0, 0, -1)$, tedy trojice bodů $(0, 0, -1)$, $(u, v, 0)$ a $\Phi(u, v) \in H_2$ leží na přímce.

Důkaz. Zobrazení Φ je na H_2 a lze považovat za mapu plochy H_2 . Parciální derivace jsou

$$\Phi_u = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} (1 + u^2 - v^2, 2uv, 2u), \\ \Phi_v = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} (2uv, 1 - u^2 + v^2, 2v),$$

a první fundamentální forma plochy H_2 (s její Riemannovou metrikou) vyjádřená vzhledem k této mapě vyjde

$$\tilde{g}_{(u,v)}^{(H_2)} = \begin{pmatrix} g^{(H_2)}(\Phi_u, \Phi_u) & g^{(H_2)}(\Phi_u, \Phi_v) \\ g^{(H_2)}(\Phi_u, \Phi_v) & g^{(H_2)}(\Phi_v, \Phi_v) \end{pmatrix} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_{(u,v)}^{(U)},$$

tedy první fundamentální formy jsou shodné a Φ je izometrie. \square

Komplexní funkce komplexní proměnné

$$\Psi : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

zobrazuje “horní polorovinu”

$$H_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

na jednotkový kruh U . Najdeme Riemannovu metriku na H_+ tak, aby Ψ bylo izometrií. Na Ψ můžeme nahlížet buď jako na funkci jedné komplexní proměnné $z = x + iy$, nebo jako na funkci dvou proměnných x, y . Protože Ψ má derivaci v komplexní proměnné, $\Psi'(z) = 2i/(z + i)^2$, platí Cauchy-Riemannův vztah

$$\Psi_x(x + iy) = (-i)\Psi_y(x + iy),$$

tedy vektory parciálních derivací Ψ_x, Ψ_y jsou stejně velké a vzájemně kolmé. Máme tedy

$$g_{\Psi(z)}^{(U)}(\Psi_x(z), \Psi_y(z)) = 0$$

a

$$\begin{aligned} g_{\Psi(z)}^{(U)}(\Psi_x(z), \Psi_x(z)) &= g_{\Psi(z)}^{(U)}(\Psi_y(z), \Psi_y(z)) = \frac{4}{(1 - |\Psi(z)|^2)^2} |\Psi'(z)|^2 \\ &= \frac{4}{\left(1 - \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2\right)^2} \left|\frac{2i}{(z+i)^2}\right|^2 \\ &= y^{-2}. \end{aligned}$$

Definice 5.4. Polorovina H_+ s Riemannovou metrikou

$$g_{x,y}^{(H_+)} \begin{pmatrix} y^{-2} & 0 \\ 0 & y^{-2} \end{pmatrix}$$

se nazývá *polorovinový model hyperbolické geometrie*.

Z výše uvedených výpočtů pak plyne

Věta 5.2. *Zobrazení Ψ je izometrií H_+ na U .*

Výše uvedené tři Riemannovy geometrie jsou tedy vlastně tři různé modely jedné a téže geometrie, nazávané *hyperbolická geometrie*. Umíme v těchto modelech měřit délku křivek, úhel křivek nebo velikost plošného obsahu. V následující kapitole uvidíme, jak lze v Riemannově geometrii definovat Gaussovu křivost a co jsou zde geodetiky (ty jsme si na plochách v \mathbb{R}^3 definovali pomocí normály, kterou zde nemáme k dispozici). Nicméně už nyní můžeme najít geodetiky jako křivky, které spojují body nejkratším způsobem. K tomu využijeme následující věty.

Věta 5.3. *Zobrazení tvaru*

$$(7) \quad \phi : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

jsou izometrie H_+ na H_+ .

Důkaz. Opět využijeme derivování podle komplexní proměnné. Platí

$$\phi'(z) = (cz + d)^{-2} \text{ a } \Im \phi(z) = y|cz + d|^{-2},$$

tedy podobně jako pro zobrazení Ψ výše dostaneme $g_{\phi(z)}^{(H_+)}(\phi_x, \phi_y) = 0$ a

$$g_{\phi(z)}^{(H_+)}(\phi_x, \phi_x) = g_{\phi(z)}^{(H_+)}(\phi_y, \phi_y) = (\Im \phi(z))^{-2} |\phi'(z)|^2 = y^{-2},$$

ϕ je tedy skutečně izometrie. \square

Tvrzení 5.4. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $0 < y_1 < y_2$ je úsečka

$$t \mapsto (x, t), \quad y_1 < t < y_2,$$

je nejkratší spojnicí bodů (x, y_1) a (x, y_2) v hyperbolickém modelu H_+ .

Důkaz. Buď $c(s) = (x(s), y(s))$, $s \in (a, b)$, křivka v H_+ parametrizovaná obloukem a taková, že $x(a) = x(b) = x$ a $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$. Předpokládejme, že $y'(s) > 0$, $s \in (a, b)$. Pro délku křivky c (s využitím substituce $y = y(s)$) dostaneme

$$L(c) = \int_a^b \frac{1}{y(s)} ds = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} \frac{dy}{y'(s)} \geq \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} dy,$$

neboť zřejmě $y'(s) \leq 1$. Poslední výraz je délka úsečky $t \mapsto (x, t)$, $y_1 < t < y_2$, délka úsečky c je tedy větší nebo rovna. Neplatí-li předpoklad $y' > 0$, rozdělíme úsečku na úseky s rostoucí či klesající y -ovou souřadnicí a jednoduchou úvahou usoudíme, že délka křivky nemůže být menší. \square

Tvrzení 5.5. Izometrie (7) zobrazují polopřímky $x = x_0, y > 0$ na opět na polopřímky tohoto typu, nebo na půlkružnice se středem na ose x .

Návod k důkazu: Je-li $c = 0$ nebo $d = 0$, dostaneme zobrazení $z \mapsto z + \alpha$ nebo $z \mapsto \beta - z^{-1}$, obě přitom zobrazují zmíněné polopřímky opět na tyto polopřímky (posunuté ve směru osy x). Je-li $c \neq 0$ a $d \neq 0$, lze ukázat, že

$$\left| \frac{ayi + b}{cyi + d} - p \right|^2 = r^2$$

pro $p = (ad + bc)/(2cd)$ a $r = 1/(2|cd|)$, tedy obrazem polopřímky $x = 0, y > 0$ je půlkružnice se středem p (ležícím na ose x) a poloměrem r . \square

Důsledek 5.6. Polopřímky rovnoběžné s osou y a půlkružnice se středem na ose x jsou nejkratšími spojnicemi svých bodů.

Pozn.: Výše uvedeným křivkám (které jsou geodetikami ve smyslu definice z následující kapitoly) odpovídají v modelu U kružnice protínající hraniční kružnici U pod pravým úhlem, v modelu H_2 řezy s rovinami procházejícími počátkem.

6. VNITŘNÍ VLASTNOSTI PLOCHY, GAUSSOVA VĚTA A ROVNICE PRO GEODETICKÉ KŘIVKY

Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ orientovaná plocha. Jejimi *vnitřními vlastnostmi* rozumíme vlastnosti dané její první fundamentální formou. Všechny vnitřní vlastnosti se tedy zachovávají při izometrickém zobrazení a lze je přenést i do kontextu Riemannovy geometrie. Ne všechny charakteristiky plochy jsou však vnitřní, například Gaussovo zobrazení $x \mapsto N(x)$ není dáno první fundamentální formou.

V celé kapitole bude dána mapa plochy S , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Budeme používat úsporné značení parciálních derivací pomocí dolních indexů, tedy např. $f_i = f_{u^i} = \frac{\partial f}{\partial u^i}$, $f_{ij} = f_{u^i, u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$, $n_i = n_{u^i} = \frac{\partial n}{\partial u^i}$, $i, j = 1, 2$, a tak podobně. Podobně jako

dříve budeme značit g^{ij} , h^{ij} koeficienty matic první a druhé fundamentální formy g, h a a^{ij} budou koeficienty inverzní matice $a = g^{-1}$, $i, j = 1, 2$.

Pro každé $u \in U$ tvoří vektory f_1, f_2, n bázi (obecně ne ortogonální) prostoru \mathbb{R}^3 . Najdeme koeficienty vektorů n_i a f_{ij} vůči této bázi.

Lemma 6.1. *Pro $i, j = 1, 2$ platí*

$$(8) \quad n_i = - \sum_k \sum_l h^{il} a^{lk} f_k,$$

$$(9) \quad f_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k f_k + h^{ij} n,$$

kde

$$(10) \quad \Gamma_{ij}^k = \sum_l a^{kl} (f_{ij} \cdot f_l)$$

$$(11) \quad = \frac{1}{2} \sum_l a^{kl} (g_j^{il} + g_i^{jl} - g_l^{ij})$$

(zde opět značíme $g_l^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^l}$). Koeficienty Γ_{ij}^k se nazývají Christoffelovy symboly.

Důkaz. Rovnosti (8,9) se ověří skalárním násobením obou stran vektory f_1, f_2, n . Rovnost výrazů (10) a (11) ověříme dosazením za derivace g_k^{ij} . \square

Podle předpokladu je f diferencovatelné zobrazení, má tedy záměnné smíšené parciální derivace třetího řádu

$$f_{ijk} = f_{ikj}, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Upravíme-li tento vztah s využitím (9), dostaneme

$$\sum_l \left(\Gamma_{ij,k}^l f_l + \Gamma_{ij}^l f_{lk} \right) + h_k^{ij} n + h^{ij} n_k = \sum_l \left(\Gamma_{ik,j}^l f_l + \Gamma_{ik}^l f_{lj} \right) + h_j^{ik} n + h^{ik} n_j.$$

Dosadíme-li opět podle (9) a (8) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_l \left(\Gamma_{ij,k}^l - \Gamma_{ik,j}^l \right) f_l + (h_k^{ij} - h_j^{ik}) n \\ &+ \sum_l \Gamma_{ij}^l \left(\sum_m \Gamma_{lk}^m f_m + h^{lk} n \right) - \sum_l \Gamma_{ik}^l \left(\sum_m \Gamma_{lj}^m f_m + h^{lj} n \right) \\ &- h^{ij} \sum_l \sum_m h^{kl} a^{lm} f_m + h^{ik} \sum_l \sum_m h^{jl} a^{lm} f_m. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u f_m a n dostaneme následující rovnice.

Věta 6.2. *Pro $i, j, k, m = 1, 2$ platí vztahy*

$$(12) \quad \Gamma_{ij,k}^m - \Gamma_{ik,j}^m + \sum_l \left(\Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m \right) = \sum_l a^{lm} (h^{ij} h^{kl} - h^{ik} h^{jl})$$

(Gaussova rovnice) a

$$(13) \quad \sum_l \left(\Gamma_{ij}^l h^{lk} - \Gamma_{ik}^l h^{lj} \right) + h_k^{ij} - h_j^{ik} = 0$$

(Codazzi-Mainardiho rovnice).

Nyní můžeme vyslovit větu o existenci plochy se zadanými funkcemi první a druhé fundamentální formy (analogie Věty 2.10).

Věta 6.3 (Bonnet). *Bud' $U \subseteq \mathbb{R}^2$ jednoduše souvislá otevřená množina g, h symetrické maticové (2×2) funkce definované na U takové, že g je pozitivně definitní a jsou splněny rovnice (12), (13) na U . Pak existuje parametrizovaná plocha $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ s maticemi první a druhé fundamentální formy g, h . Tato plocha je určena jednoznačně až na shodnost.*

(Bez důkazu.)

Dosadíme-li do pravé strany Gaussovy rovnice (12) hodnoty $i = j = 1$ a $k = m = 2$, dostaneme

$$\sum_l a^{l2} (h^{11} h^{2l} - h^{12} h^{l1}) = a^{22} \det h = g^{11} \frac{\det h}{\det g} = g^{11} K,$$

kde K je Gaussova křivost plochy v daném bodě (viz Věta 4.18). Jako důsledek tohoto pozorování dostáváme slavnou Gaussovu větu.

Věta 6.4 (Theorema Egregium). *Pro Gaussovu křivost parametrizované plochy platí*

$$K = (g^{11})^{-1} \left(\Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \sum_l \left(\Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^2 - \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^2 \right) \right).$$

Speciálně tedy Gaussova křivost je funkcí první fundamentální formy, čili je vnitřní vlastností plochy.

Důsledek 6.5. *Izometrické parametrizované plochy mají v odpovídajících bodech stejnou Gaussovu křivost.*

V případě nulové křivosti platí i obrácená implikace:

Věta 6.6. *Bud' $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha, jejíž Gaussova křivost je identicky rovna 0 na S . Pak ke každému $x \in S$ existuje okolí V tak, že restrikce $S \cap V$ je izometrická částí roviny (neboli S je 'lokálně izometrická' rovině).*

(bez důkazu)

Poznámky.

- (1) Z předchozí věty plyne, že každá rozvinutelná plocha je lokálně izometrická rovině.
- (2) Plochy

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, \ln u)^T, \\ \tilde{f}(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, v)^T, \quad u > 0, v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mají shodnou Gaussovu křivost, ale nejsou izometrické. Věta 6.6 tedy neplatí obecně bez předpokladu nulové Gaussovy křivosti.

- (3) Vzorcem z věty 6.4 lze definovat Gaussovu křivost jen pomocí první fundamentální formy, tedy i v Riemannově geometrii. Lze spočítat, že v hyperbolické geometrii z předchozí kapitoly je Gaussova křivost identicky rovna -1 (samozřejmě ve všech třech modelech, neboť jsou izometrické).

6.1. Rovnice pro geodetické křivky.

Definice 6.1. Buď $c : I \rightarrow S$ regulární křivka na ploše $S \subset \mathbb{R}^3$ a $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferencovatelné zobrazení (vektorové pole podél křivky c). *Kovariantní derivací* vektorového pole X podél křivky c nazveme zobrazení

$$\frac{\nabla X}{dt} : t \mapsto \Pi_x(X'(t)), \quad t \in I,$$

kde Π_x je operátor kolmé projekce \mathbb{R}^3 do tečného prostoru $T_x S$.

Definice 6.2. Řekneme, že regulární křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S je *parametrizovaná geodetika*, platí-li $\frac{\nabla c'}{dt}(t) = 0$, $t \in I$.

Lemma 6.7. *Buď $c : I \rightarrow S$ regulární křivka na ploše S . Je ekvivalentní:*

- (1) c je parametrizovaná geodetika,
- (2) vektor $c''(t)$ je násobkem normálového vektoru plochy $N(c(t))$ pro každé $t \in I$,
- (3) c je geodetika a její parametrizace splňuje $\|c'(t)\| = \text{konst.}$

Důkaz. Ekvivalence prvních dvou podmínek plyne přímo z definice parametrizované geodetiky. Dále je zřejmé, že z (2) plyne, že c je geodetika. Pro geodetiku je však ekvivalentní

$$c''(t) \perp T_{u(t)}f \iff c' \cdot c'' = 0 \iff \|c'(t)\|' = \frac{c' \cdot c''}{\|c'\|} = 0 \iff \|c'\| = \text{konst.},$$

z čehož plyne ekvivalence druhé a třetí podmínky.

Rovnice pro parametrizovanou geodetiku. Buď $c = f \circ u$ regulární křivka na části plochy pokryté mapou f . Derivováním rovnosti

$$c' = (u^1)' f_{u^1} + (u^2)' f_{u^2}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} c'' &= \sum_i (u^i)'' f_{u^i} + \sum_i \sum_j (u^i)' (u^j)' \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k f_{u^k} + h^{ij} n \right) (u^j)' \\ &= \sum_k \left((u^k)'' + \sum_i \sum_j (u^i)' (u^j)' \Gamma_{ij}^k \right) f_{u^k} + \sum_i \sum_j h^{i,j} n \end{aligned}$$

(Γ_{ij}^k jsou Christoffelovy symboly, viz Lemma 6.1). Z tohoto vyjádření plyne, že křivka $c = f \circ u : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizovaná geodetika, právě když vyhovuje diferenciálním rovnicím na I

$$(14) \quad \begin{aligned} (u^1)'' + \sum_i \sum_j (u^i)' (u^j)' \Gamma_{ij}^1 &= 0, \\ (u^2)'' + \sum_i \sum_j (u^i)' (u^j)' \Gamma_{ij}^2 &= 0. \end{aligned}$$

□

Poznámka: Z výše uvedeného je vidět, že kovariantní derivace vektorového pole i vlastnost ‘být geodetikou’ je vnitřní vlastností plochy, a lze s nimi tedy pracovat i v Riemannově geometrii. Speciálně tedy izometrickým obrazem geodetiky je opět geodetika.

LITERATURA

- (1) L. Boček: *Příklady z diferenciální geometrie*. Univerzita Karlova, Praha 1974
- (2) L. Boček, V. Kubát: *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1983
- (3) J. Bureš, K. Hrubčík: *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. MFF UK, Praha 1998
- (4) M.P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1976
- (5) W. Klingenberg: *A Course in Differential Geometry*. Springer-Verlag, New York 1978
- (6) V. Souček: studijní text k přednášce,
http://msekc.e.karlin.mff.cuni.cz/~soucek/kpl_11_2012.pdf