

P ř e d m l u v a

Tato skripta vznikla z potřeb posluchačů II.ročníku dálkového studia na MFF KU, u nichž 4.semestr studia je v matematické analýze vyhrazen přednášce z teorie Lebesgueova integrálu. Zatímco pro teorii a zavedení Lebesgueova integrálu mají posluchači k dispozici skripta I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I, není pro počítání příkladů v české literatuře vhodná sbírka. Jediným zatím dostupným materiálem je kniha V.Jarník, Integrální počet II, v níž jest ovšem vybudována teorie Lebesgueova integrálu odlišným způsobem než ve skriptech Černý - Mařík. Vzhledem k tomu, že ani posluchači řádného studia nemají ucelenou sbírku příkladů k této látce, rozhodl jsem se do skript zařadit i příklady těžší.

Účelem této sbírky příkladů není - na rozdíl od mnoha jiných sbírek tohoto typu - naučit posluchače spočítat všechny možné typy integrálů. Chtěl bych, aby se pomocí těchto skript podařilo překlenout posluchačům mezeru, která vzniká mezi teorií Lebesgueova integrálu a její aplikací na konkrétní příklady. Byl bych velmi spokojen, kdyby se ukázalo, že tato skripta pomohla pochopit základní myšlenky teorie Lebesgueova integrálu a ukázala posluchačům cestu, jak řešit různé typy příkladů. Domnívám se, že je užitečné dát posluchači příklad - byť s velmi podrobným návodem - a požadovat, aby dále pracoval samostatně (vše s porozuměním provedl). Jinak řečeno, je mnohem lepší spočítat jeden příklad do všech nejmenších detailů, vše dokonale podložit teorií, než počítat podle čistě mechanických pravidel množství příkladů.

Všechny příklady ve skriptech jsou s podrobným návodem (velmi často je udáno dokonce více způsobů řešení) a dají se rozdělit do čtyř skupin. V první skupině jsou většinou příklady na "kalkulus", jedná se o standartní typy příkladů, tyto by měl každý bezpodmínečně umět řešit. Do druhé skupiny jsem zařadil příklady blíže ilustrující teorii, jsou to většinou teoretické příklady a protipříklady na teorii. I příklady z této skupiny by měl mít každý posluchač velmi dobře promyšlené. Do třetí skupiny jsem zařadil příklady těžší, příklady zajímavé, které by měly tvořit jakousi nadstavbu celé teorie - chápané spíše jako příklady výběrové pro lepší studenty. Tím není pochopitelně řečeno, že jejich studium by ostatním uškodilo. Do poslední skupiny jsem zařadil příklady velmi těžké, problémové, určené spíše k řešení v samostatných zájmových kroužcích. I když nelze dělat přesnou hranici mezi jednotlivými skupinami příkladů, rozhodl jsem se přesto pro lepší orientaci jednotlivé skupiny v textu graficky rozlišit, a to takto:

- 1.skupina - pouhé označení čísla příkladu - např. 7,51 - standartní typy,
- 2.skupina - označení čísla s kroužkem - např. 7,51^o - příklady k teorii,
- 3.skupina - označení čísla s hvězdičkou - např. 7,51^{*} - zajímavé a těžší příklady,
- 4.skupina - označení čísla s dvěma hvězdičkami - např. 7,51^{**} - problémové příklady.

Ve skriptech je velmi mnoho příkladů; nelze - a ani to nemá smysl - žádat na posluchači, aby všechny spočítal. O vhodnosti výběru jednotlivých příkladů by měl každý konzultovat s přednášejícím a cvičícími.

Větší množství příkladů s sebou nese také nedostatek - je totiž velmi nepravděpodobné, že by všechny příklady byly bez chyb. Příklady nebyly jednak nikým přepočítány, jednak jejich opisováním a tiskem zajisté vznikla řada drobných chyb. Budu proto každému vděčný za upozornění na jakýkoliv nedostatek těchto skript.

Abych se nemusel neustále odvolávat na jednotlivé věty skript I. Černý - J. Mařík, Integrální počet I, pokusil jsem se v 1. kapitole vyložit základy teorie a sepsal jsem všechny příslušné věty. Jako dodatek k této kapitole jsem připojil definici a základní vlastnosti zobecněného Newtonova integrálu, které jsou v naší literatuře těžko dostupné. V druhé kapitole bych doporučoval každému posluchači si projít alespoň jeden z příkladů 2,5 - 2,23, na kterém je možno si ilustrovat celou probíranou teorii. Ve 3.-6. kapitole jsou uvedeny příklady vztahující se k Lebesgueovu integrálu z reálných funkcí v E_n . Při výběru těchto příkladů jsem vycházel hlavně z knihy V. Jarník, Integrální počet II, z které kapitolu VII by si měl každý též prostudovat. Příklady v těchto kapitolách jsou vybrány z různých knih a sbírek, není nutné, abych je zde citoval. V sedmé kapitole jsem se snažil ukázat, jakými jinými způsoby by bylo možno zavést Lebesgueův integrál. Konečně v osmé kapitole jsem shrnul a uvedl většinou těžší příklady a problémy, z nichž alespoň některé lze doporučit lepším posluchačům k řešení. Poslední kapitolu - Dodatek - sepsal RNDr Břetislav Novák, CSc, ve formě cvičení. Jedná se o další pokračování a prohloubení teorie Lebesgueova integrálu, které se sice nepřednáší ve 4. semestru, ale s kterým se setkají posluchači matematických specialisací ve vyšších ročnících. Přehled a seznam všech důležitých pojmů a symbolů je uveden na začátku skript.

Do těchto skript nebylo pochopitelně možno zařadit vše. Zcela je vynechána partie o Lebesgue-Stieltjesově integrálu, ve skriptech chybí příklady k procvičení látky na spojitost a derivaci integrálu podle parametru pro vícerozměrné integrály, méně pozornosti je věnováno horním a dolním integrálům, vnitřní míře aj.

Příklady z těchto skript je možno studovat i při jiném způsobu výkladu a zavedení Lebesgueova integrálu (např. podle sedmé kapitoly), pouze část příkladů z 2. kapitoly je zcela specifická.

Ještě bych se chtěl zmínit o stylu psaní těchto skript. Z důvodů, aby se sbírka nestala nepřehlednou a příliš rozvláchnou, jsem zvolil krátké způsoby zápisů obvyklé v matematické literatuře. Vyžaduje to ovšem schopnost posluchačů umět si vše "přepsat do běžného jazyka". Uvedu příklad. Větu

$$" \alpha, a, b \in E_1, a < b \Rightarrow \left[\frac{1}{(x-a)^\alpha} \in \mathcal{L}(a, b) \Leftrightarrow \alpha < 1 \right] "$$

je nutno číst takto:

"Buďte α, a, b reálná čísla, $a < b$. Potom funkce $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ má konečný Lebesgueův integrál od a do b , právě když $\alpha < 1$ ".

Závěrem bych chtěl poděkovat RNDr B. Novákovi, CSc, který celý rukopis přečetl a mnoha podnětnými návrhy pomohl ke zlepšení těchto skript, RNDr J. Milotovi, který přečetl sedmou kapitolu a upozornil mne na řadu nedostatků a sekretářce katedry ZMD Heleně Fryčové za skutečně nevšední ochotu a pomoc při technickém zpracování těchto skript.

Praha, listopad 1967.

Jaroslav Lukeš