D o d a t e k .

V tomto dodatku jsou uvedeny ve formě cvičení některé důležité věty, které doplňují získané znalosti o Lebesgueově integrálu a míře. Důkazy jsou většinou pouze naznačeny; při studiu je provádějte podrobně. Všechny výsledky jsou formulovány pro Lebesgueův integrál v eukleidovském r - rozměrném prostoru E_r . V celém dodatku bude proto stále $Z = C_r$ a pro $f \in Z$ je Af Riemannův integrál z funkce f přes E_r ; symbolem ρ značíme eukleidovskou /či jinou s ní ekvivalentní/ metriku v E_r .

D I . Charakteristika některých tříd funkcí, Baireovy funkce.

Připomeňme nejprve známou definici: množina $G \subset E_r$ se nazývá otevřená, jestliže pro každé $x \in G$ existuje takové $\varepsilon > 0$, že $y \in G$ kdykoliv $y \in E_r$ a $\rho(x,y) < \varepsilon$, tj. jestliže množina G obsahuje s každým svým bodem i některé jeho okolí. Množinu $F \subset E_r$ nazveme uzavřenou, je-li množina $E_r - F$ otevřená. Jak známo, sjednocení libovolného systému otevřených množin a průnik konečného systému otevřených množin je otevřená množina ; sjednocení konečného počtu uzavřených množin a průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina ; E_r a prázdná množina jsou současně uzavřené i otevřené množiny.

Zaveďme nyní malé zobecnění. Je-li $M \subset E_r$ libovolná množina, nazveme množinu $G \subset M$ otevřenou v množině M /krátce : v M /, jestliže ke každému $x \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že je-li $y \in M$, $\rho(x,y) < \varepsilon$, je také $y \in G$. Množinu $F \subset M$ nazveme uzavřenou v množině M , je-li množina $M - F$ otevřená v množině M . Množina otevřená je tedy množina otevřená v E_r ; obdobně pro uzavřené množiny.

D I. 1.

Buď $M \subset E_r$.

a/ Množina $G_1 \subset M$ je otevřená v M , právě když existuje množina $G \subset E_r$ otevřená v E_r taková, že $G_1 = G \cap M$. Obdobné tvrzení platí pro množiny uzavřené v M . Dokažte !

b/ Sjednocení libovolného systému a průnik konečného systému množin otevřených v M je množina otevřená v M . Sjednocení konečného systému a průnik libovolného systému množin uzavřených v M je množina uzavřená v M . Dokažte !

c/ Prázdná množina a množina M jsou současně otevřené i uzavřené v M.

Pomocí uzavřených a otevřených množin lze zajímavým způsobem charakterisovat spojité a polospojité /viz definici na str. 23 / funkce. Dokažte následující tvrzení.

D I. 2.

Buď $M \subset E_r$, f buď funkce definovaná na množině M a konečná.
Potom platí:

a/ f je spojitá v množině M /tj. f je spojitá v každém bodě množiny M vzhledem k této množině / $\iff$ pro libovolnou otevřenou množinu $G \subset E_1$ je množina $\{ x \in M ;\ f(x) \in G \} = M \cap f^{-1}(G)$ otevřená v množině M,

b/ f je spojitá v M $\iff$ pro každé $a \in E_1$ jsou množiny
$\{x \in M ;\ f(x) > a\}$, $\{x \in M ;\ f(x) < a\}$
otevřené v M,

c/ f je spojitá v M $\iff$ pro každé $c \in E_1$ jsou množiny
$\{x \in M ;\ f(x) \geq c\}$, $\{x \in M ;\ f(x) \leq c\}$
uzavřené v M.

D I. 3.

Buď $M \subset E_r$, f buď funkce definovaná na množině M.
Potom platí:

a/ f je polospojitá zdola /resp. shora/ v množině M $\iff$ pro každé $a \in E_1$ je množina $\{ y \in M ;\ f(y) > a \}$ /resp. množina $\{ y \in M ;\ f(y) < a \}$/ otevřená v M,

b/ f je polospojitá zdola /resp. shora/ v M $\iff$ pro každé $c \in E_1$ je množina $\{ y \in M ;\ f(y) \leq c \}$ /resp. množina $\{ y \in M ;\ f(y) \geq c \}$ / uzavřená v M.

D I. 4.

Tvrzení, která jsou uvedena v D I.2 a D I.3 zůstanou v platnosti, omezíme-li se pouze na racionální hodnoty a či c.
Dokažte !
Obecněji, buď $N \subset E_1$, $E_1 = \overline{N}$ /uzávěr množiny N /, tj. buď N hustá v E_1. Potom v tvrzeních uvedených v D I.2 a v D I.3 stačí uvažovat

pouze hodnoty $a \in N$ či $c \in N$.

Dokažte !

‖ Použijte vztahů

$$\{ y \in M ; \ f(y) \geq \alpha \} = \bigcap_{\substack{\beta \in N \\ \beta < \alpha}} \{ y \in M ; \ f(y) \geq \beta \}$$

a pod. ‖

Buď nyní $N \subset E_r$, $N \neq \emptyset$ a buď f funkce definovaná na množině N. Pro každé $x \in N$ a každé $\delta > 0$ položme

$$\varphi_\delta(x) = \sup_{\substack{\rho(x,y)<\delta \\ y \in N}} f(y) , \quad \psi_\delta(x) = \inf_{\substack{\rho(x,y)<\delta \\ y \in N}} f(y) .$$

Pro pevné $x \in N$ je funkce $\varphi_\delta(x)$ neklesající, funkce $\psi_\delta(x)$ nerostoucí pro $\delta \in (0,+\infty)$. Pro každé $x \in N$ existují tedy limity

$$M_{f,N}(x) = \lim_{\delta \to 0_+} \varphi_\delta(x) , \quad m_{f,N}(x) = \lim_{\delta \to 0_+} \psi_\delta(x) .$$

Funkce $M_{f,N}$, resp. $m_{f,N}$ se nazývá horní, resp. dolní <u>Baireova funkce</u> /příslušná k funkci f a množině N/.

Dokažte následující tvrzení.

D I.6.

Buď f funkce definovaná na množině $N \subset E_r$, $N \neq \emptyset$, buďte $M = M_{f,N}$, $m = m_{f,N}$ příslušné Baireovy funkce.

Potom pro každé $x \in N$ platí:

a/ $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$,

b/ funkce M je polospojitá shora v bodě x /vzhledem k N/, funkce m je polospojitá zdola v bodě x /vzhledem k N/ ‖ použijte definici polospojitosti na str. 23 ‖ ,

c/ f je shora polospojitá v bodě x /vzhledem k N/, právě když $f(x) = M(x)$; f je zdola polospojitá v bodě x /vzhledem k N/, právě když $f(x) = m(x)$,

d/ je-li f konečná v bodě x, je f spojitá v bodě x /vzhledem k N/, právě když $m(x) = M(x)$ / $= f(x)$ /,

e/ buď g polospojitá shora v N /vzhledem k N/, $f \leq g \leq M \Rightarrow g = M$; buď g polospojitá zdola v N /vzhledem k N/ , $m \leq g \leq f \Rightarrow g = m$.

Uveďme ještě výslovně důležitou charakterisaci měřitelných funkcí.

D I.7.

Buď $M \in \mathfrak{M}_r$. Potom $f \in \Lambda_M$, právě když pro každé $a \in E_1$ jest $\{x \in M \,;\; f(x) > a\} \in \mathfrak{M}_r$.

$\|$ Důkaz viz ve skriptech I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I , 4. kapitola či proveďte podle 8,31. Viz též 7,35 a 8,40 . $\|$

Na základě této důležité věty lze snadno dokázat následující vztahy /viz též 7,24 a 7,23/.

D I.8.

a/ Nechť $f_n \in \Lambda_M$, kde $M \in \mathfrak{M}_r$. Potom pro funkce

$$\varphi_1(x) = \sup_{n=1,2,\dots} f_n(x) \quad , \qquad \varphi_2(x) = \inf_{n=1,2,\dots} f_n(x) \; ,$$

$$\varphi_3(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m=n,n+1,\dots} f_m(x) \right) ,$$

$$\varphi_4(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m=n,n+1,\dots} f_m\, x \right)$$

platí $\varphi_j \in \Lambda_M$ / $j = 1,2,3,4$ / ,

b/ je-li $f(x) = a \in E_1$ pro všechna $x \in M$, jest $f \in \Lambda_M$,

c/ je-li $f,g,h \in \Lambda_M$, f a g konečné, je

$$\{ x \in M \,;\; |f(x) - g(x)| > h(x) \} \in \mathfrak{M}_r \; .$$

Všechny důkazy proveďte podrobně.

D I.9.

Buď $N \in \mathfrak{M}_r$, nechť f je funkce definovaná na množině N .
Potom $M_{f,N} \in \Lambda_N$, $m_{f,N} \in \Lambda_N$. Dokažte !

$\|$ Použijte D I.6 , D I.7 , D I.3 a toho, že množiny otevřené v N jsou měřitelné $\|$.

<u>Poznámka.</u>

Uvědomte si překvapivost tvrzení D I.9 a D I.6b . O funkci f nepředpokládáme totiž vůbec nic /může tedy být i neměřitelná ! /.
Jiný překvapující výsledek tohoto druhu je uveden v knize V.Jarník, Integrální počet II, věta 87 .

D II. Jegorovova a Luzinova věta.

Zajímavou vlastnost měřitelných funkcí uvádí Jegorovova věta /viz také V. Jarník, Integrální počet II, kap. II, § 2/:

D II.1.

Nechť $M \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r M < +\infty$. Buď $f_n \in \Lambda_M$ posloupnost funkcí konečných skoro všude v M , nechť $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ existuje skoro všude v M a funkce f je skoro všude v M konečná.
Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná množina $N \subset M$ taková, že $\mu_r N < \varepsilon$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ stejnoměrně v množině $M - N$. Dokažte !

⟦ Návod k důkazu:

a/ existuje $N_1 \subset M$, $\mu_r N_1 = 0$ tak, že pro $x \in M - N_1$ jsou $f(x)$, $f_n(x)$ /n = 1,2,.../ konečná čísla a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,

b/ pro přirozená m a k buď

$$N_{m,k} = \left\{ x \in M - N_1 \; ; \; \sup_{n \geq m} |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\},$$

jest

$$N_{m,k} \in \mathfrak{M}_r , \quad N_{m,k} \supset N_{m+1,k}$$

pro všechna přirozená m,k /použijte D I.8 /,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} N_{m,k} = \emptyset$$

pro každé přirozené k , a tedy i $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_r(N_{m,k}) = 0$,

c/ je-li $\varepsilon > 0$, zvolme pro každé přirozené k přirozené číslo m_k tak , že

$$\mu_r(N_{m_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad ;$$

položíme-li $N = N_1 \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N_{m_k,k}$, jest

$$\mu_r N < \varepsilon \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ stejnoměrně v } M - N . ⟧$$

D II.2.

Buďte splněny předpoklady Jegorovovy věty. Potom lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézt otevřenou množinu N tak, že $\mu_r N < \varepsilon$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ stejnoměrně v $M - N$.

⟦ použijte 7,19 - 2/ či 7,20 ⟧ .

Jegorovova věta tedy říká, že posloupnosti měřitelných funkcí, které konvergují skoro všude ke konečné funkci, se chovají "velmi rozumně", odhlédneme-li od množin, jejichž míru lze volit libovolně malou. Tvrzení Jegorovovy věty nelze podstatně zesílit.

D II.3.

Pro libovolné přirozené n buď $f_n(0) = f_n(\frac{1}{n}) = f_n(1) = 0$, $f_n(\frac{1}{2n}) = n$ a f_n buď lineární v intervalech $\langle 0, \frac{1}{2n} \rangle$, $\langle \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} \rangle$, $\langle \frac{1}{n}, 1 \rangle$.

Zřejmě $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ v $\langle 0,1 \rangle$. Ověřte na tomto příkladě Jegorovovu větu a ukažte, že pro žádnou množinu $N \subset \langle 0,1 \rangle$, $\mu_r N = 0$ není konvergence posloupnosti f_n k funkci identicky rovné nule stejnoměrná na množině $\langle 0,1 \rangle - N$.

D II.4.

Ukažte, že předpoklad $\mu_r M < +\infty$ nelze v Jegorovově větě vynechat. Jegorovova věta napovídá, že může být užitečné vyšetřovat měřitelné funkce s odhlédnutím množin, jejichž míra je malá. Skutečně, lze dokázat následující Luzinovu větu.

D II.5.

Buď $M \in \mathfrak{M}_r$, $f \in \Lambda_M$, f konečná skoro všude v M . Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná množina $N \subset M$, $\mu_r N < \varepsilon$ taková, že f je spojitá na množině $M - N$ /vzhledem k $M - N$ /.

Návod k důkazu :

1/ Buď nejprve $\mu_r M < +\infty$,

a/ existuje posloupnost funkcí $f_n \in Z$, $f_n \to f$ sk.vš. v M , $f_n \to 0$ sk.vš. v $E_r - M$ /věta 34/,

b/ k danému $\varepsilon > 0$ existuje dle Jegorovovy věty měřitelná množina $N \subset M$, $\mu_r N < \varepsilon$ taková, že $f_n \to f$ stejnoměrně v $M - N$,

c/ funkce f je spojitá na množině $M - N$ /vzhledem k $M - N$ /.

2/ Je-li $\mu_r M = +\infty$, $0 < \varepsilon < 1$, buď pro každé přirozené n M_n , resp. H_n množina všech $x = [x_1,\dots,x_r] \in M$ takových, že

$$|x_j| \leq n \quad \text{pro všechna} \quad j = 1,2,\dots,r ,$$

$$\text{resp.} \quad |x_j| = n \quad \text{pro alespoň jedno} \quad j = 1,2,\dots,r .$$

Zřejmě $\mu_r M_n < +\infty$, $\mu_r H_n = 0$

/nakreslete si uvedené množiny např. pro $n = 1,2,3$ /.

Použijeme nyní dokázanou část tvrzení na funkci f , množinu M_n a číslo $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Existuje tedy pro každé přirozené n měřitelná množina $N_n \subset M_n$, $\mu_r N_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$ taková, že funkce f je spojitá na množině $M_n - N_n$ /vzhledem k této množině/. Položíme-li nyní $N = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \right) \cap M$, je $N \subset M$ měřitelná množina, $\mu_r N < \varepsilon$ a snadno zjistíme, že f je spojitá na množině $M - N$ /vzhledem k této množině /. ⫼

D II.6.

V Luzinově větě lze požadovat, aby množina N byla otevřená.
Dokažte !

⫽ Použijte 7,19 - 2/ či 7,20 . ⫼

D II.7.

Jiný důkaz Luzinovy věty /bez použití Jegorovovy věty, proveďte podrobně!/.
Buďte splněny předpoklady D II.5 , nechť $\mu_r M < +\infty$.

a/ Buď $\{ r_n \}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost všech racionálních čísel ; množiny

$$A_n = \{ x \in M ;\ f(x) \geq r_n \} , \qquad B_n = \{ x \in M ;\ f(x) \leq r_n \}$$

jsou měřitelné /D I.8 /.

b/ Buď $\varepsilon > 0$; existují uzavřené množiny F_n a G_n tak, že

$$\mu_r(A_n - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} , \qquad \mu_r(B_n - G_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

použijte 7,20c/.

c/ Buď $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - F_n)$, $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n - G_n)$; je $\mu_r P < \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu_r Q < \frac{\varepsilon}{2}$.

d/ Položme $N = P \cup Q$, je $\mu_r N < \varepsilon$; pro každé n je

$$\{ x \in M - N ;\ f(x) \leq r_n \} = (M - N) \cap B_n = G_n \cap (M - N) ,$$

$$\{ x \in M - N ;\ f(x) \geq r_n \} = (M - N) \cap A_n = F_n \cap (M - N) .$$

e/ Funkce F je spojitá na množině $M - N$ /D I.4/.

f/ Je-li $\mu_r M = +\infty$, postupujeme jako v D II.5.

D III. Existenční věta pro Riemannův integrál. Jordan-Peanův objem.

V přednášce o Lebesgueově integrálu byla bez důkazu uvedena následující důležitá věta /viz věty 49 a 57/, která pochází od Lebesguea.

D III.1.

Buď f omezená funkce na kompaktním intervalu $I \subset E_r$. Potom Riemannův integrál $(R)\int_I f$ existuje, právě když množina bodů nespojitosti funkce f v intervalu I /spojitost chápeme vzhledem k I/ má r - rozměrnou Lebesgueovu míru nula.

<u>Dodatek</u> : existuje-li $(R)\int_I f$, existuje i $(L)\int_I f$ a platí

$$(R)\int_I f = (L)\int_I f .$$

Důkaz lze provést následujícím způsobem /proveďte podrobně všechny kroky!/:

a/ pro $x \in I$ buď $M(x) = M_{f,I}(x)$, $m(x) = m_{f,I}(x)$ /viz Baierovy funkce v D I /,

b/ jest $m \leq f \leq M$; $m \in \Lambda_I$, $M \in \Lambda_I$ /viz D I.6 , D I.9 / ,

c/ je-li $D = \{J_k\}_{k=1}^{n}$ dělení intervalu I , definujme funkce Φ_D a φ_D vztahy:

$$\Phi_D(x) = \sup_{y\in J_k} f(y) , \quad \varphi_D(x) = \inf_{y\in J_k} f(y) \qquad \text{je-li } x \in J_k^o = \operatorname{Int} J_k ,$$

$$\Phi_D(x) = \varphi_D(x) = 0 \qquad \text{je-li } x \in I - \bigcup_{k=1}^{n} J_k^o ,$$

d/ $\Phi_D \in \Lambda_I$, $\varphi_D \in \Lambda_I$ /např. dle D I.7 /

e/ je-li $|f(x)| \leq K$ pro všechna $x \in I$, kde $K \in E_1$, je $|m(x)| \leq K$, $|M(x)| \leq K$, $|\Phi_D(x)| \leq K$, $|\varphi_D(x)| \leq K$, tedy $m , M , \varphi_D , \Phi_D \in \mathcal{L}_I$

f/ $\varphi_D \leq m$, $\Phi_D \geq M$ skoro všude v I ,

g/ $$(L)\int_I \Phi_D = \sum_{k=1}^{n} \sup_{y\in J_k} f(y) \cdot \mu_r(J_k) = S(f,D) ,$$

$$(L)\int_I \varphi_D = \sum_{k=1}^{n} \inf_{y\in J_k} f(y) \cdot \mu_r(J_k) = s(f,D)$$

/horní a dolní součet příslušný k funkci f a dělení D / ,

h/ je-li D_n posloupnost dělení intervalu I , jejichž norma konverguje k nule pro $n \longrightarrow +\infty$ a

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = (R)\overline{\int_I} f ,$$

je $\lim_{n\to\infty} \Phi_{D_n} = M$ skoro všude v I /odtud dostáváme znovu, že $M \in \mathcal{L}_I$ /, tedy podle Lebesgueovy věty

$$\lim (L)\int_I \Phi_{D_n} = (L)\int_I M ,$$

i/ podle g/ a h/ dostaneme

$$(R)\overline{\int_I} f = (L)\int_I M$$

a obdobným způsobem dokážeme také

$$(R)\underline{\int_I} f = (L)\int_I m ,$$

j/ protože $m \leq f \leq M$, je

$$(R)\underline{\int_I} f = (L)\int_I m \leq (L)\underline{\int_I} f \leq (L)\overline{\int_I} f \leq (L)\int_I M = (R)\overline{\int_I} f ,$$

z této nerovnosti dostaneme ihned tvrzení dodatku,

k/ $(R)\underline{\int_I} f = (R)\overline{\int_I} f$ nastane dle j/, právě když $(L)\int_I (M - m) = 0$ a odtud dostáváme vzhledem k nerovnosti $m \leq M$ a vzhledem k D I.6d tvrzení.

<u>Poznámka.</u> Buď $M \subset E_r$, M omezená množina. Protože nosič funkce c_M /podle definice v 7,25 !!/ je množina M, existuje kompaktní interval $I \subset E_r$ takový, že pro $x \in E_r - I$ je $c_M(x) = 0$. Snadno zjistíme, že hodnoty

$$(R)\overline{\int_I} c_M , \quad \text{resp.} \quad (R)\underline{\int_I} c_M$$

nezávisí na volbě intervalu I. Tato čísla obvykle nazýváme <u>vnější</u>, resp. <u>vnitřní Jordan - Peanův objem</u> množiny M. Jsou-li stejná /tj. je-li charakteristická funkce množiny M Riemannovsky integrovatelná/, hovoříme také o Jordan - Peanově objemu množiny M.

D III.2.

Množina $M \subset E_r$ má Jordan - Peanův objem, právě když je omezená a její hranice má Lebesgueovu míru nula. Dokažte !

/Použijte D III.1./ Jordan-Peanův objem je v tomto případě roven $\mu_r M$, tj. speciálně $M \in \mathfrak{M}_r$.

/Viz též př. 8,52 a 8,53 !/.

D III.3.

Buď $M \subset E_r$ omezená množina. Potom vnější Jordan - Peanův objem množiny M je roven infimu všech čísel tvaru $\sum_{j=1}^{n} \mu_r(I_j)$, kde $I_1, I_2, \dots, I_n$ je libovolný konečný systém kompaktních intervalů, pro něž platí

$\bigcup_{j=1}^{n} I_j \supset M$.

Dokažte !

Formulujte a dokažte příslušné tvrzení pro vnitřní Jordan - Peanův objem !

D III.4.

Buď $M \subset E_r$. Potom vnější Lebesgueova míra $\tilde{\mu}_r M$ množiny M je rovna infimu všech čísel tvaru $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_r(I_j)$, kde $I_1, I_2, \dots$ je libovolná posloupnost kompaktních intervalů, pro niž platí $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset M$. Dokažte !

⟦ Použijte větu 55 či 7,19 a toho, že každou otevřenou množinu lze vyjádřit jako sjednocení spočetného systému nepřekrývajících se kompaktních intervalů. Viz též 5,5 /. ⟧

Poznámky.

1/ Tvrzení D III.3 a D III.4 názorně ukazují rozdíl mezi vnějším Jordan - Peanovým objemem a vnější Lebesgueovou mírou a tedy v podstatě také mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem.

2/ Jiný důkaz tvrzení D III.1 a podrobnější informaci o přilehlých otázkách lze nalézt v knize V.Jarník, Integrální počet II , kap. XI .

D IV. Absolutní spojitost Lebesgueova integrálu.

Z teorie Riemannova nebo Newtonova /případně zobecněného Newtonova/ integrálu je známé toto tvrzení :

" nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a nechť existuje Riemannův /Newtonův nebo zobecněný Newtonův *)/ integrál

$$\int_a^b f(t)\,dt ,$$

potom funkce $\int_a^x f(t)\,dt$ a $\int_x^b f(t)\,dt$ jsou spojité funkce proměnné x v intervalu (a,b) /viz též věta 66, poznámka 3,14/.

Pro Lebesgueův integrál lze dokázat dokonce tzv. absolutní spojitost. Uveďme nejdříve následující tvrzení.

---

*) V případě zobecněného Newtonova nebo Newtonova integrálu můžeme připustit i hodnoty $a = -\infty$ či $b = +\infty$.

D IV.1.

Nechť $M \in \mathfrak{M}_r$, $f \in \mathcal{L}_M$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$$N \subset M\ ,\ N \in \mathfrak{M}_r\ ,\quad \mu_r N < \delta \Rightarrow \left|\int_N f\right| < \varepsilon\ .$$

Návod k důkazu :

a/ $|f| \in \mathcal{L}_M$ /věta 44/,

b/ buď pro n přirozené $f_n = \min(|f|, n)$; potom $f_n \in \mathcal{L}_M$ /viz cvičení 8,27 , 8,28 / , $f_n \nearrow |f|$

a tedy /Leviho věta/

$$\int_M f_n \nearrow \int_M |f| \quad ,$$

c/ je-li $\varepsilon > 0$, existuje n_o tak, že

$$\int_M (|f| - f_{n_o}) = \int_M |f| - \int_M f_{n_o} < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

d/ buď $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2n_o}$, nechť $N \subset M$, $N \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r N < \delta$,

potom je

$$\left|\int_N f\right| \leq \int_N |f| = \int_N (|f| - f_{n_o}) + \int_N f_{n_o} < \frac{\varepsilon}{2} + n_o \mu_r N < \varepsilon .$$

D IV.2.

Dokažte tvrzení uvedené v D IV.1 sporem !

Existuje $\varepsilon > 0$ a množiny $N_k \subset M$, $N_k \in \mathfrak{M}_r$, $k = 1,2,\ldots$ tak, že $\mu_r N_k < \dfrac{1}{2^k}$ a $\displaystyle\int_{N_k} |f| \geq \varepsilon$.

Buď $N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} N_k$. Je tedy $\mu_r N = 0$.

Označíme-li $P_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} N_k \supset N_n$,

je $P_n \in \mathfrak{M}_r$, $P_1 \supset P_2 \supset \ldots\ldots$, $N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n$.

Protože $\displaystyle\int_{P_1} |f| < +\infty$, je podle věty 29

$$0 = \int_N |f| = \lim_{n\to\infty} \int_{P_n} |f| \ ,$$

což je spor s $\displaystyle\int_{P_n} |f| \geq \int_{N_n} |f| \geq \varepsilon$.

Buď nyní $-\infty < a < b < +\infty$ a buď F funkce definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Budeme říkat, že F je absolutně spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný systém čísel

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b \;,$$

pro nějž platí $\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta$,

platí také

$$\sum_{j=1}^{n} \left| F(b_j) - F(a_j) \right| < \varepsilon \;.$$

Funkce absolutně spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$ je zřejmě také stejnoměrně spojitá /stačí volit $n = 1$ / a tedy také spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$.

D IV.3.

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathscr{L}_{(a,b)}$, $K \in E_1$.
Potom funkce F ,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + K$$

/tzv. neurčitý Lebesgueův integrál funkce f /
je absolutně spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$. Dokažte !

Zřejmě $f \in \mathscr{L}_{(a,x)}$ pro libovolné $x \in \langle a,b \rangle$,
pro $N = \bigcup_{j=1}^{n} \langle a_j, b_j \rangle$, kde $a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots$
$\dots \leq a_n \leq b_n \leq b$ je $\mu_1 N = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$
a pro $j = 1,2,\dots, n$ je

$$\left| F(b_j) - F(a_j) \right| = \left| \int_{a_j}^{b_j} f(t)\, dt \right| \leq \int_{a_j}^{b_j} \left| f(t) \right| dt \;,$$

tj. $\sum_{j=1}^{n} \left| F(b_j) - F(a_j) \right| \leq \int_N \left| f(t) \right| dt$,

stačí tedy použít D IV.1.

D IV.4.

Dokažte, že tvrzení D IV.1 neplatí, nahradíme-li Lebesgueův integrál Newtonovým neb zobecněným Newtonovým integrálem !

Buď $F(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2}$ pro $x \in (0, \pi\rangle$, $F(0) = 0$.
Potom funkce F je primitivní funkcí k funkci $f = F'$ v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Pro každé přirozené K však je

$$\left| F\left(\frac{1}{\sqrt{K\pi}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{(K+1)\pi}}\right) \right| = \frac{1}{K\pi} + \frac{1}{(K+1)\pi} \;.$$

Pro libovolná přirozená čísla m a n , $m > n$ je tedy

$$\sum_{K=n}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{K\pi}}-\frac{1}{\sqrt{(K+1)\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}-\frac{1}{\sqrt{(m+1)\pi}}<\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

a

$$\sum_{K=n}^{m}\left|F\left(\frac{1}{\sqrt{K\pi}}\right)-F\left(\frac{1}{\sqrt{(K+1)\pi}}\right)\right|=\frac{1}{\pi}\sum_{K=n}^{m}\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{K+1}\right)>\frac{1}{\pi}\sum_{K=n}^{m}\frac{1}{K}.$$

Odtud ihned dostaneme /harmonická řada/, že F není absolutně spojitá v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. $\rfloor\!\!|$

Poznámka.

Tvrzení uvedené v D IV.3 lze formulovat také slovy: neurčitý Lebesgueův integrál je funkce absolutně spojitá. Naskýtá se přirozeně opačná otázka. Buď $-\infty < a < b < +\infty$ a buď F funkce absolutně spojitá v $\langle a,b\rangle$. Existuje potom funkce $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ tak, aby pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$ platilo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + K,$$

kde K je vhodná konstanta ? Odpověď dává následující věta /viz V.Jarník, Integrální počet II, věta 94 /.

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a nechť funkce F je absolutně spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom pro skoro všechna $x \in \langle a,b\rangle$ existuje vlastní derivace $F'(x)$, jest $F' \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ a existuje taková konstanta $K \in E_1$, že pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ platí

$$F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt + K.$$

Na základě této věty dokažte následující větu.

D IV.5.

Buď $-\infty < a < b < +\infty$.

a/ Je-li F absolutně spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$, $F' = 0$ skoro všude v $\langle a,b\rangle$, potom F je konstantní v $\langle a,b\rangle$.

b/ Tvrzení uvedené v a/ neplatí, nahradíme-li slova absolutně spojitá slovy spojitá /viz cvičení 8,71 /.

D IV.6.

Buď $-\infty < a < b < +\infty$.

a/ Nechť $\varphi \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ a nechť $\int_a^x \varphi(t)\,dt = 0$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$. Potom $\varphi = 0$ skoro všude v $\langle a,b\rangle$.

‖ Buď $M = \{x \in \langle a,b\rangle ; \varphi(x) > 0\}$, nechť $\mu_\gamma M > 0$. Podle 7,20 existuje uzavřená množina $F \subset M$, $\mu_\gamma F > 0$. Protože $(a,b) - F$ je sjednocení spočetného systému otevřených intervalů, je $\int_F \varphi = 0$, což je spor. ‖

b/ Buď f funkce definovaná skoro všude v $\langle a,b\rangle$.

Potom $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$, právě když existuje funkce F absolutně spojitá v $\langle a,b\rangle$ taková, že $F' = f$ skoro všude v $\langle a,b\rangle$.

Potom je

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) .$$

‖ Použi..e D IV.6a a větu uvedenou před D IV.5 . ‖

Poznámka.

Poslední tvrzení udává vlastně tzv. deskriptivní definici Lebesgueova integrálu pomocí jistého dalšího zobecnění pojmu primitivní funkce. Tvrzení D IV.5a zaručuje nezávislost této definice na volbě funkcé F, tvrzení D IV.5b ukazuje, že předpoklad absolutní spojitosti nelze nahradit pouze spojitostí.

D V. Riemann - Lebesgueova věta o lokalisaci.

V třetím semestru studia je probírána elementární teorie Fourierových řad /viz skripta V.Jarník, Matematická analysa pro třetí semestr, kap. III, § 7/. Pomocí Lebesgueova integrálu lze zavést Fourierovy řady pro obecnější třídy funkcí.

Buď $0 < \ell < +\infty$ a nechť funkce f je definována v celém E_1 a má periodu ℓ /tj. $f(x + \ell) = f(x)$ pro každé $x \in E_1$ /. Nechť dále $f \in \mathcal{L}_{(0,\ell)}$/ je tedy také $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ pro libovolná $a,b \in E_1$, $a < b$; odůvodněte ! /. Funkci f můžeme přiřadit její Fourierovu řadu

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{\ell}\right) , \qquad (1_D)$$

kde čísla a_k a b_k jsou dána vztahy /c je libovolné reálné číslo /

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_c^{c+\ell} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{\ell}\, dx , \quad k = 0,1,2,\ldots$$
$$(2_D)$$
$$b_k = \frac{2}{\ell} \int_c^{c+\ell} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{\ell}\, dx , \quad k = 1,2,\ldots .$$

/ukažte, že integrály existují ! /.

Je nyní přirozené zajímat se o následující otázky: kdy řada (1_D) konverguje, kdy konverguje stejnoměrně a jaký je její součet. Vyhovující odpověď dává následující Dirichlet - Jordanova věta.

Buď $0 < \ell < +\infty$, buď f definovaná v celém E_1 a nechť f má periodu ℓ. Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a nechť f má v intervalu $\langle a,b \rangle$ konečnou variaci x/.

Potom platí:

1. V každém bodě $x \in (a,b)$ je Fourierova řada (1_D) funkce f konvergentní a má součet

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$$

/je-li tedy f spojitá v bodě x, je součet řady $f(x)$ /.

2. Je-li navíc f spojitá v $\langle a,b \rangle$, je její Fourierova řada stejnoměrně konvergentní v každém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b)$.

Důkaz této věty /a řadu dalších vět, které se týkají Fourierových řad/ lze nalézt v knize V.Jarník, Integrální počet II, kap. XIII. Celý text prvých šesti paragrafů této kapitoly lze studovat bez podrobné znalosti předchozích kapitol, tj. bez ohledu na to, známe-li Lebesgueův integrál zavedený na základě Daniellovy metody nebo jiným způsobem. Uveďme proto jen jednodušší důkaz tzv. Riemann - Lebesgueovy věty o lokalisaci.

D V.1.

Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Buď g_n /$n = 1,2,\ldots$/ posloupnost funkcí definovaných na intervalu (a,b), nechť

a/ $g_n \in \Lambda_{(a,b)}$ pro každé n,

b/ existuje konstanta $M \in E_1$ tak, že $|g_n(x)| \leq M$ pro všechna $x \in (a,b)$ a všechna n,

c/ pro každý interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ platí

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta g_n = 0 . \tag{3_D}$$

Potom pro každou funkci $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ a každý interval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a,b \rangle$ je

$$\lim_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta f \cdot g_n = 0 . \tag{4_D}$$

Je-li navíc konvergence v (3_D) stejnoměrná vzhledem k α, β /$a \leq \alpha \leq \beta \leq b$/, platí i (4_D) stejnoměrně v α, β /$a \leq \alpha \leq \beta \leq b$/.

---

x/ Viz V.Jarník, Diferenciální počet II, kap. V, §9; tento požadavek znamená totéž jako existence dvou konečných a neklesajících funkcí f_1, f_2 v $\langle a,b \rangle$ takových, že $f = f_1 - f_2$ v $\langle a,b \rangle$.

Návod k důkazu /provádějte podrobně/:

a/ Nechť $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$, nechť je dáno $\varepsilon > 0$.
Podle 8,70 existuje funkce g /elementární jednoduchá funkce/ tvaru $g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot c_{I_j}$, kde $I_j \subset (a,b)$ jsou disjunktní intervaly, pro niž

$$\int_a^b |f - g| < \frac{\varepsilon}{2M} .$$

b/ Jsou-li α a β libovolná čísla, $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, je

$$\left| \int_\alpha^\beta (f - g) \cdot g_n \right| \leq \int_a^b |f - g| \cdot |g_n| \leq M \int_a^b |f - g| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

c/ Dále je

$$\left| \int_\alpha^\beta g \cdot g_n \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \int_{I_j} g_n \right| \leq \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \cdot \left| \int_{I_j} g_n \right| .$$

d/ Využijeme-li odhadu

$$\left| \int_\alpha^\beta f \cdot g_n \right| \leq \left| \int_\alpha^\beta (f - g) \cdot g_n \right| + \left| \int_\alpha^\beta g \cdot g_n \right|$$

dostaneme ihned tvrzení .

D V.2.

Buď $0 < \ell < +\infty$, buď f funkce definovaná v celém E_1 s periodou ℓ a nechť $f \in \mathcal{L}_{(0,\ell)}$. Definujme čísla a_k, b_k podle (2_D).
Potom $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

Použijte D V.1 .

D V.3.

Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom pro $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ je

$$\lim_{t\to+\infty} \int_\alpha^\beta f(x) \cos tx \, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_\alpha^\beta f(x) \sin tx \, dx = 0 ,$$

přičemž konvergence je stejnoměrná vzhledem k α, β pro $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. Dokažte.!

Použijte D V.1 .

25535 r