8. Těžší příklady a problémy

V této kapitole uvedeme různé – většinou těžší – příklady i problémy. Jejich výběr /rovněž tak i pořadí/ není nikterak systematický; jsou určeny převážně pro lepší studenty se zájmem o problematiku Lebesgueova integrálu.

8,1. Buď $Z = \{ f \in S(E_1)$; existují intervaly $\langle a_i , b_i)$, $i = 1,2,\dots,n$, $-\infty < a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n < +\infty$, a reálná čísla $y_1 ,\dots, y_n$ tak, že $f(x) = y_i$ pro $x \in \langle a_i , b_i)$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \}$.

Tedy systém Z je systém všech elementárních jednoduchých funkcí /viz též 7,43/ s omezeným nosičem v E_1 . Ukažte, že Z tvoří základní systém funkcí, tj. jsou splněny axiomy $1_Z - 3_Z$.

Definujme funkci φ v E_1 takto :

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x < 1 , \quad \varphi(x) = 1 \quad \text{pro} \quad x \geq 1 .$$

Na systému Z definujme funkcionál A předpisem:

je-li $f \in Z$, $f(x) = y_i$ pro $x \in \langle a_i , b_i)$, položíme

$$Af = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\varphi(b_i) - \varphi(a_i) \right) .$$

Dokažte, že

I/ funkcionál A je jednoznačně definován,

II/ funkcionál A splňuje axiomy $4_A - 6_A$,

III/ funkcionál A splňuje axiom 7_A .

[III/ Označte $I_n = \langle \frac{n}{n+1} , 1)$ a uvažujte posloupnost $f_n = c_{I_n}$ charakteristických funkcí intervalů I_n .]

**/ Jak vypadají systémy Z^R , Z^K ?

8,2. Definujme systém funkcí Z stejně jako v př. 8,1. Buď φ libovolná spojitá a neklesající funkce v E_1 . Pro $f \in Z$ /$f(x) = y_i$, je-li $x \in \langle a_i , b_i)$ / definujeme

$$Af = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(\varphi(b_i) - \varphi(a_i) \right) .$$

Splňuje funkcionál A na Z axiomy $4_A - 7_A$? Jestliže ano, zkoumejte, jak vypadají systémy Z^*, $\mathcal{L}$, Λ, $\mathcal{M}$. Srovnejte též s teorií Lebesgue - Stieltjesova integrálu. Co se stane, vynecháme-li předpoklad spojitosti funkce φ a definujeme-li

$$Af = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(\lim_{x \to b_i-} \varphi(x) - \lim_{x \to a_i+} \varphi(x) \right) ?$$

8,3. Buď $Z = \{ f \in S(\langle a,b \rangle) ;\ f$ je lomená čára v $\langle a,b \rangle$ - tj. existují $t_0, \dots, t_n$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tak, že v každém intervalu $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ je f lineární $\}$.

Ukažte, že systém Z splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$.

Je-li $f \in Z$, existuje k funkci f v intervalu $\langle a,b \rangle$ primitivní funkce F /proč?/. Položme

$$Af = F(b) - F(a) .$$

Dokažte, že

I/ funkcionál A je jednoznačně definován,

II/ funkcionál A splňuje axiomy $4_A - 7_A$.

Dodatek **:

III/ jak vypadají systémy Z^*, $\mathcal{L}$, Λ, $\mathcal{M}$?

8,4. Buď $Z = \{ f \in S(E_1) ;\ f$ je lomená čára v E_1, tj. existují $a,b \in E_1$ tak, že

a/ f je lomená čára v $\langle a,b \rangle$ - viz cvič. 8,3 ,

b/ $f(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, a\rangle \cup \langle b, +\infty) \}$.

Dokažte, že systém Z splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$.

Je-li $f \in Z$, existuje k funkci f v E_1 primitivní funkce F (proč?), položme

$$Af = \lim_{x \to +\infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x) .$$

Dokažte, že

I/ funkcionál A je jednoznačně definován,

II/ funkcionál A splňuje axiomy $4_A - 7_A$.

Dodatek **:

III/ jak vypadají systémy Z^*, $\mathcal{L}$, Λ, $\mathcal{M}$?

8,5.* Buď (Z,A) základní prostor. Buď

$$Z' = \Big\{ f \in S(P) \;;\; \text{ke každému } \varepsilon > 0 \text{ existují funkce } f_1, f_2 \in Z \text{ tak, že } f_1 \leq f \leq f_2 \text{ a } A(f_2 - f_1) < \varepsilon \Big\} .$$

Dokažte, že:

I/ $Z \subset Z' \subset \mathcal{L}$.

II/ Z' tvoří základní systém funkcí, tj. splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$.

Definujeme-li základní prostor (Z,A) jako v př. 8,3 jest

$$Z' = \Big\{ f \in S(\langle a,b\rangle) \;;\; \text{existuje } (R)\int_a^b f \Big\} .$$

8,6.* Buď (Z,A) základní prostor. Buď

$$\hat{Z} = \Big\{ f \in S(P) \;;\; f \in \mathcal{L} \text{ a } f \text{ je omezená na } P \Big\} .$$

Dokažte, že

I/ $\hat{Z} \subset \mathcal{L}$,

II/ $\hat{Z}$ tvoří základní systém funkcí ,

III/ $\hat{Z}^R \subset \Big\{ f \in \mathcal{L}^R \;;\; f \text{ je zdola omezená na } P \Big\}$. Na příkladě ukažte, že nemusí platit rovnost.

8,7.* Buď (Z,A) základní prostor. Buď

$$\mathring{Z} = \Big\{ f \in S(P) \;;\; f \in \mathcal{L} \text{ a } f \text{ je konečná na } P \Big\} .$$

Dokažte, že

I/ $Z \subset \mathring{Z} \subset \mathcal{L}$,

II/ $\mathring{Z}$ tvoří základní systém funkcí.

Jak vypadají systémy $\mathring{Z}^R$, $\mathring{Z}^K$?

8,8.* /důležité!/.

Buď (Z,A) základní prostor. Buď $\bar{\bar{Z}}$ systém funkcí, který splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$ a pro nějž platí $Z \subset \bar{\bar{Z}} \subset \mathcal{L}$. V důsledku poslední inkluse můžeme na systému $\bar{\bar{Z}}$ definovat funkcionál $\bar{\bar{A}}$ následovně :

je-li $f \in \bar{\bar{Z}}$, je $f \in \mathcal{L}$; existuje tedy Af a položíme $\bar{\bar{A}} f = Af$.

Ukažte, že $(\bar{\bar{Z}},\bar{\bar{A}})$ je opět základní prostor.

Systém $\overline{\overline{Z}}$ s funkcionálem $\overline{\overline{A}}$ můžeme tedy rozšířit Daniellovou metodou, dostaneme systém $\overline{\overline{\mathscr{L}}}$ a na něm funkcionál $\overline{\overline{\overline{A}}}$.

Dokažte, že

I/ $\mathscr{L} = \overline{\overline{\mathscr{L}}}$,

II/ $f \in \overline{\overline{\mathscr{L}}} \implies \overline{\overline{\overline{A}}}\, f = Af$.

/Odtud je též vidět, že "rozšířením ($\mathscr{L}$, A) " podle př. 8,7 nedostáváme již nic nového/.

8,9. Ukažte následující ekvivalenci axiomu 7_A /za předpokladu, že platí axiomy $1_Z - 3_Z$, $4_A - 6_A$ /:

$$\text{axiom } 7_A \iff \left[f, f_n \in Z \,,\ |f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \implies A|f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} A|f_n| \right] .$$

8,10.* Ukažte, že pro libovolnou funkci $f \in S(P)$ jest

$$\tilde{A}|f| = \inf \sum_{n=1}^{\infty} A|f_n| \ , \ \text{kde } f_n \in Z \,,\ |f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \ .$$

8,11. Předpokládejme, že kromě axiomů $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ je splněn ještě další axiom:

$$\text{axiom } 8_S \ : \ f \in Z \implies \min(f,1) \in Z$$

/tzv. Stoneův axiom/. Axiom 8_S nemusí být obecně splněn - viz kupř. 2,5, 2,6, 2,8 aj.

Dokažte, že potom platí

I/ $a > 0 \,,\ f \in Z \implies \min(f,a) \in Z$,

II/ $f \in \mathscr{L} \implies \min(f,1) \in \mathscr{L}$,

III/ $f \in \Lambda \implies \min(f,1) \in \Lambda$.

8,12.* Buď (Z,A) základní prostor. Dokažte, že

$f \in \mathscr{L} \iff$ existují $g,h \in Z^R$ tak, že

$$Ag < +\infty \ , \quad Ah < +\infty \ , \quad f = g - h \text{ sk. vš.}$$

Potom zřejmě $Af = Ag - Ah$.

/Opět jeden ze způsobů, jak by bylo možno definovat integrál a vyhnout se přitom definici horního a dolního integrálu/.

8,13. Ukažte na příkladě, že nemusí vždy být $Z = Z^R \cap Z^K$.

‖ Viz např. 8,3 či prostor Z z př. 7,37 v případě jednoduchých funkcí v E_1. Srovnejte též s větou 47. ‖

8,14.** Buď $Z = \left\{ f \in S(\langle 0,1\rangle) ;\ \frac{f(x)}{x} \text{ je spojitá v intervalu } (0,1\rangle, f(0) \in E_1 \text{ a existuje vlastní } \lim_{x\to 0_+} x^{-1} \cdot f(x) \right\}$.

Ukažte, že pro libovolnou $f \in Z$ existuje $(N)\int_0^\infty f(e^{-t})\,dt$, definujeme tedy

$$Af = (N)\int_0^\infty f(e^{-t})\,dt \quad \text{pro } f \in Z .$$

Ukažte, že (Z,A) tvoří základní prostor a zkoumejte, jak vypadají systémy Z^*, $\mathcal{L}$, Λ, $\mathcal{M}$.

8,15.* Označme symbolem $\mathcal{F}$ systém všech funkcí $f \in S(P)$, pro něž

$$\tilde{A}\,|f| < +\infty \quad , \text{ tj.}$$

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in S(P) ;\ \tilde{A}\,|f| < +\infty \right\}.$$

Pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{F}$ položme $Nf = \tilde{A} f^+ - \tilde{A} f^-$.

Dokažte, že

1/ $\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset S(P)$,

2/ $\mathcal{L} = \Lambda \cap \mathcal{F}$,

3/ $f \in \mathcal{F}$, $g \sim f \implies g \in \mathcal{F}$,

4/ nemusí být $\mathcal{F} \subset \Lambda$ ani $\Lambda \subset \mathcal{F}$.

Uvažujme nyní množinu $\hat{S}(P)$, jejíž elementy jsou třídy ekvivalentních funkcí z $S(P)$; obdobně buďte $\hat{\mathcal{F}}$, $\hat{Z}$, $\hat{\mathcal{L}}$ množiny, jejichž elementy jsou třídy funkcí ze systémů $\mathcal{F}$, Z, $\mathcal{L}$. Tedy systém všech funkcí $S(P)$, (resp. systém $\mathcal{F}$, Z či $\mathcal{L}$) jsme rozdělili do tříd tak, že dvě funkce f,g patří do téže třídy, právě když $f \sim g$ (v P). /Ukažte, že vztah $f \sim g$ je skutečně ekvivalence/. Pro libovolné třídy Φ, $\Psi \in \hat{\mathcal{F}}$ definujme

$$\rho_1(\Phi, \Psi) = \tilde{A}\,|\varphi - \psi| \text{ kde } \varphi \in \Phi,\ \psi \in \Psi .$$

Obdobně definujeme

$$\sigma_1(\varphi, \psi) = \tilde{A}\,|\varphi - \psi| \text{ pro } \varphi, \psi \in \mathcal{F} .$$

Dokažte, že

1/ číslo $\rho_1(\Phi, \Psi)$ nezávisí na výběru funkcí φ, ψ ze tříd Φ, Ψ, tj. je-li $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$, potom $\tilde{A}\,|\varphi_1 - \psi_1| = \tilde{A}\,|\varphi_2 - \psi_2|$,

2/ $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$ je metrický prostor,

3/** $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$ je úplný metrický prostor,

4/ σ_1 není metrika na $\mathcal{F}$,

5/** σ_1 je pseudometrika na $\mathcal{F}$,

6/* funkcionál N je spojitý na $\mathcal{F}$, tj. pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{F}$ platí :

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{g\in\mathcal{F}} \; \sigma(f,g) < \delta \Rightarrow |Nf - Ng| \leq \varepsilon\,)$$

7/ $f \in Z \Longrightarrow Nf = Af$,

8/ $\mathcal{L} = \left\{ f \in \mathcal{F} \;;\; \forall_{\varepsilon>0} \exists_{g\in Z} \; \sigma_1(f,g) < \varepsilon \right\}$

‖ viz též lemma v odstavci 2,9 skript I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I ‖

9/ uzávěr množiny $\hat{Z}$ v prostoru $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$ je roven $\hat{\mathcal{L}}$,

10/** $(\hat{\mathcal{L}}, \rho_1)$ je úplný metrický prostor,

11/ $(\hat{\mathcal{L}}, \rho_1)$ je uzavřeným podprostorem $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$.

Dodatek**:

charakterisujte konvergenci v prostoru $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$, tj. udejte nutné či postačující podmínky, aby $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ v metrice ρ_1 /či $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ v pseudometrice σ_1 /.

8,16.* Buď $\mathcal{H} = \{ A \in \mathcal{M},\ \mu A < +\infty \}$.

Řekneme, že dvě množiny $A, B \subset P$ jsou ekvivalentní /píšeme $A \sim B$/, právě když množina $(A - B) \cup (B - A)$ je nulová. Buď $\hat{\mathcal{H}}$ množina, jejíž elementy jsou třídy ekvivalentních množin z $\mathcal{H}$ /ukažte, že vztah $A \sim B$ je skutečně ekvivalence !/.

Pro libovolné dva prvky $\hat{A}$, $\hat{B}$ z množiny $\hat{\mathcal{H}}$ /tj. pro libovolné dvě třídy ekvivalentních množin/ položme $\rho_2(\hat{A},\hat{B}) = \mu(A-B) + \mu(B-A) = \mu\left[(A-B) \cup (B-A)\right]$, kde $A \in \hat{A}$, $B \in \hat{B}$.

Dále položme

$$\sigma_2(A,B) = \mu(A-B) + \mu(B-A) = \mu\left[(A-B) \cup (B-A)\right]$$ pro libovolné $A, B \in \mathcal{H}$.

Dokažte, že

1/ číslo $\wp_2(\hat{A},\hat{B})$ nezávisí na výběru množin A,B ze tříd $\hat{A}$, $\hat{B}$,

2/ $(\hat{\mathcal{H}}, \wp_2)$ je metrický prostor,

3/* $(\hat{\mathcal{H}}, \wp_2)$ je úplný metrický prostor,

4/ pro $A \in \hat{A}$, $B \in \hat{B}$, $\hat{A},\hat{B} \in \hat{\mathcal{H}}$ jest

$$|\mu A - \mu B| \leq \sigma_2'(A,B)$$

/tj. - zhruba řečeno - μ je spojitá funkce na prostoru $(\hat{\mathcal{H}}, \wp_2)$ /,

5/* $(\mathcal{H}, \sigma_2')$ je pseudometrický prostor,

6/** posloupnost množin $A_n \in \mathcal{H}$ konverguje k množině $A \in \mathcal{H}$ v pseudometrice σ_2' /tj. $\lim_{n\to\infty} \sigma_2'(A_n, A) = 0$ /, právě když je splněna následující podmínka:

pro každé $\varepsilon > 0$ je $\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in P ;$

$$|c_{A_n}(x) - c_A(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

/c_M je charakteristická funkce množiny M /.

8,17.* /viz př. 2,18/.

Buď P spočetná množina, nechť $P = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.
Nechť $Z = \{f \in S(P) ;\ f$ je omezená na $P\}$. Pro libovolnou $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_n)}{2^n}$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ každá podmnožina P je měřitelná,

3/ $\mu\{x_n\} = \frac{1}{2^n}$,

4/ $\mu P = 1$,

5/ metrický prostor $(\hat{\mathcal{H}}, \wp_2)$ - definici viz v cvičení 8,16 - je kompaktní

[ukažte, že prostor $(\hat{\mathcal{H}}, \wp_2)$ je homeomorfní s Cantorovým diskontinuem C / viz př. 5,7/ - pro $A \subset P$, $A = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} \ldots\}$, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ položte

$$h(A) = \frac{2}{3^{n_1}} + \frac{2}{3^{n_2}} + \frac{2}{3^{n_3}} + \ldots \in C\ ].$$

$\boxed{8{,}18.^{*}}$ V tomto cvičení předpokládejme, že $P \in \mathfrak{M}$.

Potom platí

1/ $f \in \Lambda \iff$ pro každé $c \in E_1^*$ je $\{x \in P\ ;\ f(x) < c\} \in \mathfrak{M}$ - viz př. 8,30 ,

2/ $f,g \in \Lambda \implies f.g \in \Lambda$ - viz př. 8,41 .

Dokažte, že potom také platí následující tvrzení:

3/ $f,g \in \Lambda \implies \dfrac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}^{R}$,

4/ $M \in \mathfrak{M}$, $\mu M < +\infty$, $f,g \in \Lambda_M \implies \dfrac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}_M$.

Buď nyní $M \in \mathfrak{M}$, $\mu M < +\infty$ /stále předpokládáme $P \in \mathfrak{M}$ /. Definujme množinu $\hat{\Lambda}_M$ obdobně jako v př. 8,15, tj. $\hat{\Lambda}_M$ je množina, jejímiž prvky jsou třídy ekvivalentních funkcí (na M). Pro $\Phi, \Psi \in \hat{\Lambda}_M$ položme

$$\rho_3(\Phi, \Psi) = A_M\left(\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right) , \text{ kde } f \in \Phi \ , \ g \in \Psi \ .$$

Dokažte dále, že

5/ číslo $\rho_3(\Phi, \Psi)$ nezávisí na výběru funkcí f,g ze tříd Φ , Ψ ,

$\overset{*}{4}$/ $(\hat{\Lambda}_M , \rho_3)$ je metrický úplný prostor ,

$\overset{**}{5}$/ jsou-li $f_n \in \Phi_n$, $f \in \Phi$, potom $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ v metrice ρ_3 /tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_3(\Phi_n, \Phi) = 0$ / $\iff$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ jest $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x \in M\ ;\ |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0$ /viz též př. 8,16/.

Změnila by se nějak situace, kdybychom nepředpokládali $P \in \mathfrak{M}$?

$\boxed{8{,}19.^{*}}$ Označme symbolem $\hat{\mathfrak{M}}$ systém všech tříd ekvivalentních množin z $\mathfrak{M}$ /dvě množiny A,B jsou ekvivalentní, jestliže množina $(A-B) \cup (B-A)$ je nulová - viz též př. 8,16/.

Definujme funkci φ takto:

$$t \in \langle 0,+\infty) \implies \varphi(t) = 1 - e^{-t} ,$$

položme navíc $\varphi(+\infty) = 1$.

Pro $\hat{A},\hat{B} \in \hat{\mathfrak{M}}$ položme

$$\rho_4(\hat{A},\hat{B}) = \varphi\left(\mu\left[(A-B) \cup (B-A)\right]\right) , \text{ kde } A \in \hat{A} , \ B \in \hat{B} .$$

Dokažte, že

1/ číslo $\rho_4(\hat{A},\hat{B})$ nezávisí na výběru množin A,B ze tříd $\hat{A},\hat{B}$,

2/ $(\hat{\mathfrak{M}}, \rho_4)$ je úplný metrický prostor.

Pro libovolnou množinu $M \in \mathfrak{M}$ označme symbolem e(M) třídu všech množin ekvivalentních s množinou M .

Potom platí

3/ $A,B \in \mathfrak{M} \implies$

a/ $e(A \cup B) = e(A) \cup e(B)$,

b/ $e(A \cap B) = e(A) \cap e(B)$,

c/ $e(A-B) = e(A) - e(B)$,

4/ definujeme-li zobrazení F_1, F_2, F_3 z $\hat{\mathfrak{M}} \times \hat{\mathfrak{M}}$ do $\hat{\mathfrak{M}}$ předpisem

$F_1(\hat{A},\hat{B}) = \hat{A} \cup \hat{B} = \widehat{A \cup B}$,

$F_2(\hat{A},\hat{B}) = \hat{A} \cap \hat{B} = \widehat{A \cap B}$,

$F_3(\hat{A},\hat{B}) = \hat{A} - \hat{B} = \widehat{A-B}$,

jsou zobrazení F_1 , F_2 , F_3 na $\hat{\mathfrak{M}} \times \hat{\mathfrak{M}}$ /s obvyklou metrikou/ spojitá,

5/ předpokládáme-li navíc $P \in \mathfrak{M}$ a definujeme-li zobrazení F_4 z $\hat{\mathfrak{M}}$ do $\hat{\mathfrak{M}}$ předpisem

$$F_4(\hat{A}) = \hat{P} - \hat{A} = \widehat{P-A} ,$$

je F_4 spojité na $\hat{\mathfrak{M}}$ /vše s metrikou ρ_4 ! /.

8,20.** Studujte vzájemný vztah jednotlivých metrik z příkladů 8,15 - 8,19 /tj. je-li např. pravda, že $\rho_2(E,F) = \rho_1(c_E , c_F)$ aj./. Studujte též konvergenci v jednotlivých prostorech !

8,21.* Buď dána matice reálných čísel /nekonečná/, $(u_{n,m})_{n,m=1}^{+\infty}$

Předpokládejme, že

1/ pro každé $n \in N$ řada $\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}$ konverguje absolutně, označme $v_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}$,

2/ pro každé $m \in N$ existuje $\lim_{n\to\infty} u_{n,m}$, označme $u_m = \lim_{n\to\infty} u_{n,m}$,

3/ buďto a/ $u_{n,m} \leq u_{n+1,m}$ pro každé m,n anebo

b/ $|u_{n,m}| \leq s_m$ pro každé $n \in N$ a všechna $m \in N$, přičemž řada $\sum_{m=1}^{\infty} s_m$ konverguje .

Potom $\lim_{n\to\infty} v_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_m$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_{n,m} .$$

Dokažte !

Vyjděte ze základního prostoru ve cvičení 2,21 a použijte Leviho a Lebesgueovu větu !

$\boxed{8{,}22.^{*}}$ Buď P základní množina, (Z,A) základní prostor, nechť $\mathcal{L}$ je systém všech funkcí na P s konečným abstraktním integrálem.
Definujme nyní systém funkcí $\mathcal{W}$ s definičním oborem P :

$$f \in \mathcal{W} \iff \text{pro libovolné funkce } g,h \in \mathcal{L}$$

takové, že $g \leq 0 \leq h$, jest $\max(g; \min(f,h)) \in \mathcal{L}$.

Poznámka: velmi mnoho autorů definuje systém měřitelných funkcí právě tímto způsobem; v dalším uvidíme, jaký je vztah systémů Λ a $\mathcal{W}$. Funkce ze systému $\mathcal{W}$ nazývejme pseudoměřitelné.

Dokažte následující tvrzení:

1/ $f_1 \in \mathcal{W}$, $f_1 \sim f_2 \implies f_2 \in \mathcal{W}$,

2/ $\mathcal{L} \subset \mathcal{W}$,

3/ $f \in \mathcal{W}$, $h \in \mathcal{L}$, $|f| \leq h \implies f \in \mathcal{L}$,

4/ $f_n \in \mathcal{W}$, $f_n \longrightarrow f$ sk.vš. $\implies f \in \mathcal{W}$,

použijte Lebesgueovu větu ,

5/ $\Lambda \subset \mathcal{W}$, na příkladě 2,10 ukažte, že nemusí být $\Lambda = \mathcal{W}$,

6/ $f \in \mathcal{W}$, $a \in E_1 \implies af \in \mathcal{W}$,

7/ $f_1 , f_2 \in \mathcal{W} \implies$

a/ $\max(f_1 , f_2) \in \mathcal{W}$,

b/ $\min(f_1 , f_2) \in \mathcal{W}$,

c/ $f_1 + f_2 \in \mathcal{W}$, má-li součet smysl sk.vš.,

8/ $f \in \mathcal{W} \implies f^+ , f^- \in \mathcal{W}$,

$\overset{*}{9}$/ $f_n \in \mathcal{W} \Rightarrow \sup_n f_n \in \mathcal{W}$, $\inf_n f_n \in \mathcal{W}$,
$\lim_{n\to\infty} \sup f_n \in \mathcal{W}$, $\lim_{n\to\infty} \inf f_n \in \mathcal{W}$,

10/ $f \in \mathcal{W}$, $g,h \in \mathcal{L}$, $g \leq f \leq h \Rightarrow f \in \mathcal{L}$,

11/ $f \in \mathcal{W}$, $g,h \in \mathcal{L} \Rightarrow \max(g; \min(f,h)) \in \mathcal{L}$

⌈ položte $g_1 = \min(g,0)$, $h_1 = \max(h,0)$ a ukažte, že
$\min(g_1,h) \leq \max(g; \min(f,h)) \leq \max(g,h_1)$ ⌋ .

8,23.* Definujme nyní systém množin $\mathcal{M}$ takto :

$A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow c_A \in \mathcal{W}$ /viz předchozí cv. 8,22/.

Množiny ze systému $\mathcal{M}$ nazývejme <u>pseudoměřitelné</u>.

Dokažte, že

1/ systém $\mathcal{M}$ tvoří σ - okruh podmnožin množiny P /viz definice 7,2/

⌈ použijte výsledků předchozího odstavce ⌋ ,

2/ $\mathcal{M}$ nemusí být σ-algebra /viz 7,2/, tj. nemusí být $P \in \mathcal{M}$,

⌈ viz např. 2,5 ⌋ ,

3/ $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$, na příkladě ukažte, že nemusí být $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$.

8,24.* Předpokládejme, že Daniellovo rozšíření splňuje ještě další axiom,

<u>axiom 9</u> : existuje funkce $g \in \mathcal{L}$ taková, že

$0 < g(x) \leq 1$ pro každé $x \in P$,

tj. k axiomům $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ přidáme ještě axiom 9 .

Ukažte, že

1/ axiom 9 nemusí být vždy splněn , tj. přesněji - existují prostory, splňující 1_Z-3_Z , 4_A-7_A a nesplňující axiom 9

⌈ viz např. 2,10 ⌋ ,

2/ platí-li axiom 9 , potom $\Lambda = \mathcal{W}$ /viz 8,22/

⌈ buď $g \in \mathcal{L}$ taková, že $0 < g(x) \leq 1$ pro každé $x \in P$,
buď $f \in \mathcal{W}$; položte $f_n = \max(-ng , \min(f,ng))$ a ukažte, že
$f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \longrightarrow f$ ⌋ ,

3/ platí-li axiom 9, potom $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$ /viz 8,23/,

4/ viz též př. 8,25 .

8,25. Buď $P \in \mathcal{M}$. Potom je axiom 9 /viz 8,24/ splněn.

Dokažte!

Je-li $\mu P = 0$, je tvrzení zřejmé. Buď tedy $\mu P > 0$.
Podle definice existuje posloupnost $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \nearrow c_P$.
Můžeme předpokládat, že $f_n \geq 0$ /proč?/ a že $Af_n > 0$ pro všechna n /proč?/. Položíme-li

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n . Af_n}, \quad g(x) = \min(G(x) \; ; \; 1)$$

/viz též 8,28!/, vyhovuje funkce g požadavkům axiomu 9.

8,26. Na konkrétních příkladech jsme viděli, že některé obecné vlastnosti různých systémů mohou být v Daniellově rozšíření splněny, ale také nemusí být splněny. Kupříkladu může, ale nemusí být $P \in \mathcal{M}$ /př. 2,5/; může, ale nemusí být splněn Stoneův axiom 8_S /viz př. 8,11/ či axiom 9 /viz př. 8,24/, systémy Λ a $\mathcal{W}$ všech měřitelných a pseudoměřitelných funkcí /viz 8,22/ se mohou, ale nemusí shodovat aj. Budeme se zabývat nyní těmito problémy trochu podrobněji - položíme tedy kromě axiomů $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ na celou teorii ještě další axiomy a budeme zkoumat jejich vzájemný vztah. V dalších příkladech proto vždy předpokládáme, že původní axiomy $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ jsou splněny.

8,27. Kromě Stoneova axiomu 8_S /viz cv. 8,11/ uvažujme ještě další axiom 8_S^* /jakýsi "zeslabený" Stoneův axiom/

axiom 8_S^* : $f \in \mathcal{L}$, $f \geq 0 \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L}$

/aby na tomto místě nedošlo k nedorozumění, umluvme se, že symbolem 1 budeme značit funkci, která na množině P nabývá všude hodnoty 1 /.

1/ Ukažte, že z platnosti axiomu 8_S plyne:

a/ $f \in Z \Rightarrow \max(f,-1) \in Z$,

b/ $f \in Z$, $a > 0 \Rightarrow \min(f,a) \in Z$,

c/ $f \in Z^R \Rightarrow \min(f,1) \in Z^R$, $\max(f,-1) \in Z^R$,

d/ axiom 8_S^*,

e/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L}$,

f/ $f \in \Lambda \Rightarrow \min(f,1) \in \Lambda$.

2/ Na příkladě 2,8 ukažte, že axiom 8_S^* může být splněn a axiom 8_S nikoliv, tj. z axiomu 8_S^* neplyne axiom 8_S.

3/ Dále ukažte, že z platnosti axiomu 8_s^* plyne:

a/ celý prostor je pseudoměřitelná množina, tj. $P \in \mathcal{M}$ /viz 8,23/

‖ máte ukázat, že $c_P \in \mathcal{W}$ - k tomu je nutné a stačí dokázat /viz definice 8,22/, že

$\max(g\,;\,\min(c_P;\,h)) \in \mathcal{L}$, kdykoliv $g,h \in \mathcal{L}$, $g \leq 0 \leq h$, což jest již snadné ‖,

b/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{L}$

‖ $\min(f;1) = \min(f^+;1) - f^-$ ‖,

c/ $f \in \Lambda \Rightarrow \min(f;1) \in \Lambda$,

d/ $f \in \mathcal{W} \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{W}$.

4/ Na příkladě 2,8 ukažte, že z axiomu 8_s^* neplyne ještě $P \in \mathfrak{M}$.

8,28. Předpokládejme, že $P \in \mathcal{M}$ /viz 8,23/. Potom platí:

a/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{L}$

‖ z definice systému $\mathcal{W}$ - viz 8,22 - lehko ukážete, že $\min(f^+;1) \in \mathcal{L}$ a dále použijete vztahu $\min(f;1) = \min(f^+;1) - f^-$ ‖,

b/ axiom 8_s^*,

c/ $f \in \mathcal{W} \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{W}$

‖ plyne přímo z př. 8,22 - 7b a ze vztahu $c_P \in \mathcal{W}$, tj. ze vztahu $1 \in \mathcal{W}$ /viz úmluvu v 8,27/ ‖,

d/ $f \in \Lambda \Rightarrow \min(f;1) \in \Lambda$

‖ plyne z definice systému měřitelných funkcí Λ a ze vztahu $f_n \longrightarrow f \Rightarrow \min(f_n;1) \longrightarrow \min(f;1)$ ‖.

Ukažte, že tvrzení a/ - d/ zůstanou v platnosti i tehdy, předpokládáme-li $P \in \mathfrak{M}$

‖ plyne okamžitě ze vztahu $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$ - viz 8,23 ‖.

8,29. Ukažte, že platí následující ekvivalence:

$$P \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \left[f \in \mathcal{L}\,,\ f \geq 0 \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{L} \right]$$

‖ viz 8,27 a 8,28. ‖

$\boxed{8,30.^{*}}$ Podle cvičení 7,13 - 8/ má míra $\tilde{\mu}$ / $= \tilde{A}c_M$ / definovaná na systému všech podmnožin množiny P vlastnosti vnější míry /viz 7,12/. Můžeme tedy definovat systém $\mathfrak{M}(\tilde{\mu})$ všech $\tilde{\mu}$ - měřitelných množin podle 7,15. V Daniellově rozšíření máme nyní tři systémy - systém $\mathfrak{M}$ všech měřitelných množin, systém $\mathcal{M}$ všech pseudoměřitelných množin /viz 8,23/ a nyní i systém $\mathfrak{M}(\tilde{\mu})$ všech $\tilde{\mu}$ - měřitelných množin. Ptáme se, jaký je vztah těchto jednotlivých systémů.

Dokažte následující:

1/ $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$ /viz př. 8,23/

2/ $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$.

Máte dokázat následující implikaci:

$A \in \mathcal{M} \implies$ pro libovolnou množinu T s $\tilde{\mu}T < +\infty$ jest $\tilde{\mu}(T \cap A) + \tilde{\mu}(T - A) \leq \tilde{\mu}T$ /rozmyslete !/.

Buď tedy $A \in \mathcal{M}$, $\tilde{\mu}T < +\infty$. Ukažte, že existuje funkce $h \in \mathcal{L}$ taková, že $c_T \leq h$, $Ah = \tilde{\mu}T$. Položte $h_n = \min(n.c_A;h)$. Protože $h_n \longrightarrow c_A.h$, plyne odtud, že $c_A.h \in \mathcal{W}$, ze vztahu $0 \leq c_A.h \leq h$ plyne dokonce, že $c_A.h \in \mathcal{L}$ /viz 8,22 - 3/ /. Odtud již lehko odvodíte, že

$$\tilde{\mu}(A \cap T) \leq A(c_A.h),$$

$$\tilde{\mu}(T - A) \leq \tilde{\mu}T - A(c_A.h) \quad .$$

Z dokázaných vztahů nám nyní plyne, že vždy $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$. Na příkladech ukažte, že mezi těmito systémy nemusí nastat rovnost. Pro další pouze ještě poznamenejme, že každý ze systémů $\mathfrak{M}$, $\mathcal{M}$, $\mathfrak{M}(\tilde{\mu})$ tvoří σ - okruh podmnožin množiny P /viz 7,2 / a že vždy $P \in \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$ /viz 7,16/.

Dokažte dále, že

3/ platí-li axiom 9 $\implies \mathfrak{M} = \mathcal{M}$ /viz 8,24/,

4/ je-li $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$, nemusí ještě platit axiom 9

za základní systém funkcí Z vezměte systém všech funkcí tvaru $f(x) = kx$ na intervalu $(0,+\infty)$, pro $f \in Z$, $f(x) = kx$ položte $Af = k$,

5^{**}/ $\mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mu}) \iff P \in \mathcal{M}$

$\Vert\overline{}$ a/ Je-li $\mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$, je $P \in \mathcal{M}$ podle předchozí poznámky.

b/ Buď tedy $P \in \mathcal{M}$ a $E \in \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$. Máte ukázat, že $c_E \in \mathcal{W}$. K tomu musíte ukázat, že $\min(c_E;h) \in \mathcal{L}$, kdykoliv $h \in \mathcal{L}$, $h \geq 0$ $\underline{}\Vert$,

6/ $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}) \iff P \in \mathfrak{M}$

$\Vert\overline{}$ a/ Opět je $P \in \mathfrak{M}$, je-li $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$.

b/ Buď $P \in \mathfrak{M}$. Podle 8,25 je splněn axiom 9, tedy $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$ /viz 8,24/ a podle předchozí části – jelikož je $P \in \mathcal{M}$ je i $\mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$ $\underline{}\Vert$.

Z právě dokázaných výsledků tedy plyne, že

7/ $\mathfrak{M} = \mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}) \iff P \in \mathfrak{M}$.

$\boxed{8,31.^{*}}$ Obdobně jako jsme definovali různé systémy "měřitelných" množin – totiž systémy $\mathfrak{M}$, $\mathcal{M}$ a $\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$ – můžeme definovat i různé systémy "měřitelných" funkcí. Předně máme definován systém Λ všech měřitelných funkcí a systém $\mathcal{W}$ všech pseudoměřitelných funkcí /viz 8,22/. Vzhledem k tomu, že systémy $\mathfrak{M}$, $\mathcal{M}$, $\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$ tvoří σ – okruhy podmnožin množiny P, můžeme dále definovat systémy $\Lambda(\mathfrak{M})$, $\Lambda(\mathcal{M})$, $\Lambda(\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}))$ všech $\mathfrak{M}$ – měřitelných, $\mathcal{M}$ – měřitelných a $\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$ – měřitelných funkcí podle 7,23 a podle poznámky v odstavci 7,25 /uvědomte si, že nemusí být $P \in \mathfrak{M}$ ani $P \in \mathcal{M}$!/. Jaký bude nyní vztah těchto systémů ?

Dokažte následující

a/ $\Lambda \subset \mathcal{W}$

$\Vert\overline{}$ viz 8,22 $\underline{}\Vert$,

b/ platí-li axiom 9, jest $\Lambda = \mathcal{W}$

$\Vert\overline{}$ viz 8,24 $\underline{}\Vert$,

c/ $\Lambda(\mathfrak{M}) \subset \Lambda(\mathcal{M}) \subset \Lambda(\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}))$,

d/ $P \in \mathfrak{M} \iff \Lambda(\mathfrak{M}) = \Lambda(\mathcal{M}) = \Lambda(\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}))$

$\Vert\overline{}$ viz 8,30 – 7/ $\underline{}\Vert$,

**e/ $\Lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{W}$,

**f/ $P \in \mathcal{M} \Rightarrow \Lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{W}$,

g/ $\left[f \in \mathcal{W} \Rightarrow \{x \in P;\ f(x) < c\} \in \mathcal{M} \text{ pro libovolné } c \in E_1\right]$
$\Rightarrow P \in \mathcal{M}$

⌈ označíte-li f_o funkci rovnou 0 na množině P , jest zřejmě $f_o \in \mathcal{W}$ a např.

$\{x \in P ;\ f_o(x) < 5\} = P$ ⌋ ,

h/ $\left[f \in \Lambda \Rightarrow \{x \in P ;\ f(x) < c\} \in \mathfrak{M} \right.$ pro libovolné $\left. c \in E_1 \right] \Rightarrow P \in \mathfrak{M}$

⌈ postupujte stejně jako v g/ ⌋ .

Odtud již lehko dokážete, že

i/ $P \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow \Lambda = \mathcal{W} = \Lambda(\mathfrak{M}) = \Lambda(\mathcal{M}) = \Lambda(\mathfrak{M}(\tilde{\mu}))$,

speciálně tedy

j/ $P \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow \left[f \in \Lambda \Leftrightarrow \right.$ pro každé $c \in E_1$ jest $\left. \{x \in P ;\ f(x) < c\} \in \mathfrak{M} \right]$

V posledním tvrzení je obsažena velmi důležitá charakteristika měřitelných funkcí pomocí měřitelných množin.

8,32.* Nechť platí axiom 9 - viz 8,24 - potom

(1) : existuje posloupnost funkcí $f_n \in Z$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = +\infty \qquad \text{pro každé } x \in P .$$

⌈ Buď $g \in \mathcal{L}$ taková funkce, že $0 < g(x) \leq 1$ pro každé $x \in P$. Potom existuje funkce $h \in Z^R$ taková, že $h \geq g$. Dále použijte definici systému Z^R . ⌋

8,33.* Nechť platí (1) v 8,32. Potom

(2) : existuje posloupnost funkcí $g_n \in Z$ taková, že

$$g_n \geq 0 \quad \text{a} \quad \tilde{\mu}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = 0 , \quad \text{kde}$$

$$G_n = \{x \in P ;\ g_n(x) = 0\} .$$

⌈ Stačí položit $g_n = |f_n|$. ⌋

8,34.* Předpokládejme, že $P \in \mathcal{M}$ /viz definici 8,23/ a že platí (2) z cvičení 8,33. Potom platí axiom 9 /viz 8,24/.

⌈ Je-li $\tilde{\mu} P = 0$, je tvrzení zřejmé. Buď tedy g_n posloupnost funkcí, jejíž existenci zaručuje (2) v 8,33.

Ukažte, že

a/ $Ag_n > 0$ alespoň pro jednu hodnotu n , b/ lze předpokládat, že $Ag_n > 0$ pro všechny hodnoty n .

Položte $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^n . Ag_n}$, $g(x) = \begin{cases} \min(h(x); 1) & \text{je-li } h(x) > 0 , \\ 1 & \text{je-li } h(x) = 0 . \end{cases}$

Ukažte, že funkce g má vlastnosti potřebné v axiomu 9 . ‖

8,35.* Předpokládejme, že $P \in \mathcal{M}$ a že platí axiom 9 /viz 8,24/. Potom platí

(3) : existují množiny $E_n \in \mathfrak{M}$ takové, že

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{a} \quad \mu E_n < +\infty \quad \text{pro každé } n .$$

(Toto je vlastnost, vyjadřující tzv. σ - konečnost míry - viz 7,29/.

‖ Uvědomte si předně, že podle 8,24 jest $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$.
Buď g funkce, jejíž existenci zaručuje axiom 9 . Položte $f_n = \min(1; ng)$, $E_n = \{ x \in P ; f_n(x) = 1 \}$. ‖

8,36. Předpokládejme, že je splněna vlastnost

(3′) : existují množiny $E_n \in \mathcal{M}$ takové, že $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $\tilde{\mu} E_n < +\infty$ pro každé n

/uvědomte si, že míru μ máme definovánu pouze na systému $\mathfrak{M}$ a že z uvedených předpokladů není ihned zřejmé, že $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$ /.
Potom $P \in \mathcal{M}$ a je splněn axiom 9 / a tedy $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$ / .

‖ $P \in \mathcal{M}$ plyne z toho, že systém $\mathcal{M}$ tvoří σ - okruh . Je-li $\tilde{\mu} P = 0$, je tvrzení zřejmé. Ukažte dále, že množiny E_n v (3′) lze volit dokonce disjunktní, položte potom

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n . \tilde{\mu}(E_n)} c_{E_n} , \quad g = \min(1;h)$$ ‖

8,37. Ukažte, že

1/ axiom 9 a vlastnosti (1) , (2) , (3) jsou splněny v případě $\mu P = 0$,

2/ axiom 9 a jednotlivé vlastnosti (1) , (2) , (3) jsou ekvivalentní, jestliže $P \in \mathcal{M}$ a $\tilde{\mu} P > 0$.

8,38. Z předchozích výsledků odvoďte následující velmi zajímavou vlastnost:

$$P \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow \text{existují množiny } E_n \in \mathfrak{M}\ ,\ \mu E_n < +\infty\ ,\quad P = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\ ,$$

tj. prostor P má σ - konečnou míru, právě když je měřitelný.

‖ Je-li $P \in \mathfrak{M}$, je splněn podle 8,25 axiom 9 a podle 8,30 - 7/ jest $\mathcal{M} = \mathfrak{M}$. Dále použijte 8,35. Ostatní je již snadné.

Dokažte ostatně toto tvrzení též přímo. Je-li $P \in \mathfrak{M}$, existují funkce $f_n \in \mathcal{L}$ tak, že $f_n \nearrow c_P$. Předpokládejme, že $\mu P > 0$ a uvažujme množiny $E_n = \left\{ x \in P\ ;\ f_n(x) \geq \frac{1}{2} \right\}$. Podle 8,31 - j/ jest $E_n \in \mathfrak{M}$ a zřejmě $\mu E_n < +\infty$. Obrácené tvrzení plyne z věty 13 . ‖

8,39.* Předpokládejme, že je splněna vlastnost (1) z 8,32. Buď $h \in \Lambda$, $h \geq 0$, $c = \sup \left\{ Af\ ;\ f \in \mathcal{L}\ ,\ 0 \leq f \leq h \right\} < +\infty$. Potom $h \in \mathcal{L}$ a $Ah = c$. Dokažte !

‖ Buď f_n posloupnost funkcí z vlastnosti (1), položte

$$h_n = \min \left(|f_1| + \dots + |f_n|\ ;\ h \right)\ . \ ‖$$

<u>Poznámka</u>: tato věta platí i tehdy, předpokládáme-li pouze $h \in \mathcal{W}$.

8,40.* Projděte si ještě jednou cvičení 8,27 - 8,39 a snažte se přehledně a graficky si znázornit všechny implikace. Sepište si též, co lze všechno tvrdit v případě, že $P \in \mathfrak{M}$!

‖ $P \in \mathfrak{M} \Rightarrow$

a/ existuje funkce $g \in \mathcal{L}$ tak, že $0 < g(x) \leq 1$ pro každé $x \in P$ /axiom 9/, nelze obrátit,

b/ $\left[f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L} \right]$ /zeslabený Stoneův axiom/, nelze obrátit,

c/ $\mathfrak{M} = \mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$, lze obrátit

/speciálně: $E \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow$ pro každou množinu $T \subset P$ jest $\tilde{\mu} T = \tilde{\mu}(T \cap E) + \tilde{\mu}(T - E)$ /

d/ $\Lambda = \mathcal{W} = \Lambda(\mathfrak{M}(\tilde{\mu}))$, lze obrátit, tedy $f \in \Lambda \Leftrightarrow$ pro libovolné funkce $g,h \in \mathcal{L}$, $g \leq 0 \leq h$ jest $\max(g; \min(f,h)) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$ pro libovolné $c \in E_1$ jest

$$\left\{ x \in P\ ;\ f(x) < c \right\} \in \mathfrak{M}\ ,$$

e/ množina P má σ - konečnou míru, tj. existují $E_n \in \mathfrak{M}$, $\mu E_n < +\infty$, $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, lze obrátit,

f/ viz též ještě cvičení 8,41, 8,42. ‖

$\boxed{8,41.^*}$ Buď $P \in \mathfrak{M}$. Potom

I/ $f \in \Lambda \Rightarrow \operatorname{sign} f \in \Lambda$. Dokažte !

Platí tato implikace i bez předpokladu $P \in \mathfrak{M}$?

Plyne z platnosti této implikace již $P \in \mathfrak{M}$?

II. $f, g \in \Lambda \Rightarrow f.g \in \Lambda$

‖ Podle 8,31 jest $\Lambda = \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$ a podle 7,24 je součin dvou $\tilde{\mu}$ - měřitelných funkcí opět $\tilde{\mu}$ - měřitelná funkce ‖.

Lze poslední tvrzení dokázat i bez předpokladu $P \in \mathfrak{M}$?
Plyne z této implikace již $P \in \mathfrak{M}$? /Viz též odstavec 4,3 ze skript I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I - co se v důkazu vlastně předpokládá ?/

$\boxed{8,42.^{**}}$ Uveďme ještě jeden abstraktní problém. Nejdříve si však dokažte následující jednoduchou, ale užitečnou větu.

"Buďte (Z_1, A_1), (Z_2, A_2) dva základní prostory nad stejnou množinou P. Buďte $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ příslušné systémy funkcí s konečným abstraktním integrálem A_1, A_2. Potom platí:

$$\left[\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \quad \text{a} \quad A_1 f = A_2 f \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2\right] \Leftrightarrow \left[Z_1 \subset \mathcal{L}_2,\ Z_2 \subset \mathcal{L}_1 \quad \text{a} \quad A_1 f = A_2 f \quad \text{pro} \quad f \in Z_1 \quad \text{i pro} \quad f \in Z_2\right]."$$

Ve cvičení 7,38 jsme uvedli následující větu - buď (Z, A) základní prostor, proveďme Daniellovo rozšíření, dostaneme trojici $(P, \mathfrak{M}, \mu)$. Označme symbolem $\bar{Z}$ systém všech jednoduchých funkcí na P s $\mu(N(f)) < +\infty$. Pro funkce ze systému $\bar{Z}$ můžeme definovat integrál $\bar{A}$ jako v př. 7,37 /vše si zopakujte!/. Získáme opět základní prostor $(\bar{Z}, \bar{A})$, můžeme opět provést Daniellovo rozšíření, dostaneme systém $\bar{\mathcal{L}}$ a integrál $\bar{A}$ na něm.

Ptali jsme se, je-li splněna podmínka

$$(LS): \quad \mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} \quad \text{a} \quad Af = \bar{A}f \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}.$$

Viděli jsme též, že odpověď na tuto otázku je positivní v případě, že $P \in \mathfrak{M}$. To tedy znamená, že podmínka $P \in \mathfrak{M}$ je postačující podmínkou pro platnost vztahu (LS). Hledejme nyní nějaké další postačující - či nutné - podmínky pro platnost vztahu (LS).

25535 Z16

Dokažte následující:

1/ (LS) nemusí být vždy splněno

‖ viz př. 2,5 , kde jediná měřitelná množina je prázdná množina ‖,

2/ předpokládáme-li, že $\Lambda = \mathcal{W}$ /viz 8,22/, dokažte, že libovolná z následujících podmínek je postačující pro platnost (LS) :

a/ Stoneův axiom 8_s /viz 8,11/ ,

b/ zeslabený Stoneův axiom 8_s^* /viz 8,27/,

c/ $f,g \in Z \Rightarrow f.g \in Z$,

d/ $f \in Z$, $f \geq 0 \Rightarrow f^2 \in \Lambda$.

Je některá z těchto podmínek i podmínkou nutnou?

Jaká je situace v případě, že není $\Lambda = \mathcal{W}$?

**) V tomto případě je nutné trochu pozměnit definici jednoduchých funkcí vzhledem k systému $\mathcal{M}$.

V dalších několika příkladech se opět omezíme pouze na Lebesgueův integrál v eukleidovských prostorech /tj. předpokládáme, že základní systém $Z = C_r$ a Af je Riemannův integrál přes E_r /. Některá tvrzení by bylo možno též vyslovit obecněji, nebudeme se tím však zabývat - přenecháme toto čtenáři.

8,43.* Pro libovolnou množinu $A \subset E_1$ a pro libovolné $k > 0$ značme $A^{(k)} = A \cap \langle -k,+k \rangle$, pro libovolnou funkci f , $f \geq 0$ a pro libovolné $k > 0$ značme symbolem $f^{(k)}$ funkci /neplést s derivacemi!/ definovanou následovně

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro ta } x \text{, pro něž } f(x) \leq k , \\ k & \text{pro } x \text{ taková, že } f(x) > k . \end{cases}$$

Dokažte, že

1/ $A \in \mathcal{M}_1$, $k > 0 \Rightarrow A^{(k)} \in \mathcal{M}_1$,

2/ $f \in \Lambda_M$, $f \geq 0$, $k > 0 \Rightarrow f^{(k)} \in \Lambda_M$.

3/ je-li $M \in \mathcal{M}_1$, $f \in \Lambda_M$, $f \geq 0$ na M , potom

$f \in \mathcal{L}_M \Leftrightarrow f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ pro každé $k > 0$ a

$\lim_{k \to \infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$ je konečná

/V tomto případě pak zřejmě $\int_M f = \lim_{k \to \infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$ /.

‖ Návod k důkazu posledního tvrzení:

a/ je-li $f \in \mathcal{L}_M$, jest $f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ pro každé $k > 0$ a použije se Lebesgueova věta,

b/ označme $a = \lim_{k\to\infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$, pro libovolné celé r označte

$$Q_r = \left\{ x \in M ;\ 2^r \leq f(x) < 2^{r+1} \right\},$$

dále položte

$$Q_{-\infty} = \left\{ x \in M ;\ f(x) = 0 \right\},\quad Q_{+\infty} = \left\{ x \in M ;\ f(x) = += +\infty \right\}$$

a definujte funkci F takto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in Q_{-\infty}, \\ 2^{r+1} & \text{pro } x \in Q_r, \\ +\infty & \text{pro } x \in Q_{+\infty}, \end{cases}$$

lehko ukážete, že $F \in \mathcal{L}_M$ a $|f| \leq F$, odkud již vyplyne tvrzení. ‖

Poznámky:

1/ Jak by bylo možno vyslovit uvedenou větu pro prostory vyšší dimense či pro abstraktní prostory ?

2/ Uvedenou větu by bylo možno zobecnit. Platí následující:

"buď $f \in \Lambda_M$, $f \geq 0$, $M \in \mathcal{M}_1$. Potom

$f \in \mathcal{L}_M \iff f^{(q)} \in \mathcal{L}_{M(p)}$ pro všechny hodnoty p,q

a $\lim\limits_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}} \int_{M(p)} f^{(q)}$ je konečná".

Bylo by ovšem třeba vysvětlit, co se rozumí "dvojnou" limitou $\lim\limits_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}$ – čtenáře je možno odkázat na knihu V. Jarník, Diferenciální počet II.

8,44. Dokažte následující tvrzení.

Buď f libovolná funkce na množině $M \subset E_r$. Pro libovolné $a,b \in E_1$, $a < b$ označme $f^{(b)}_{(a)}$ funkci definovanou předpisem

$$f^{(b)}_{(a)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro ta } x \in M \text{, pro něž } a \leq f(x) \leq b, \\ b & \text{pro } x \in M,\ f(x) > b, \\ a & \text{pro } x \in M \text{ taková, že } f(x) < a. \end{cases}$$

Je-li $f \in \Lambda_M$, potom je $f_{(a)}^{(b)} \in \Lambda_M$ pro libovolné $a,b \in E_1$, $a < b$.

‖ Při důkazu použijte větu 56. Je vidět, že věta zůstane v platnosti i obecně - stačí předpokládat - jak vyplyne z provedeného důkazu - že $\Lambda = \Lambda(\mathfrak{M})$, tj. stačí pouze předpokládat, že $P \in \mathfrak{M}$ /viz 8,31/. ‖

8,45. Zobecněme nyní trochu tvrzení z 8,43. Buď opět f libovolná funkce na množině $M \in \mathfrak{M}_1$, ne nutně již nezáporná, buď $k > 0$. Podle předešlého cvičení 8,44 můžeme utvořit funkci $f_{(-k)}^{(k)}$, značme ji pro krátkost opět $f^{(k)}$/ ukažte, že toto označení není ve sporu s označením z př. 8,43/.

Potom platí:

je-li $f \in \mathcal{L}_M$, je i $f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ pro každé $k > 0$

a $\int\limits_M f = \lim\limits_{k \to +\infty} \int\limits_{M(k)} f^{(k)}$.

Dokažte !

‖ Použijte vztahů

a/ $f = f^+ - f^-$,

b/ $f^{(k)} = (f^+)^{(k)} + (-f^-)^{(k)}$,

a cvičení 8,43. ‖

Poznámka:

Opět nebylo podstatné, že jsme uvažovali pouze Lebesgueovy integrály v E_1, pokuste se uvedenou větu zobecnit.

8,46. Na tomto místě se dostáváme k teorii "zobecněných" integrálů. Věta z předchozího odstavce nám k tomu dává vhodnou příležitost. Viděli jsme totiž, že za předpokladu $f \in \mathcal{L}_M$ je i $f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ pro každé $k > 0$ a platí rovnost $\int\limits_M f = \lim\limits_{k \to +\infty} \int\limits_{M(k)} f^{(k)}$. Může se nyní stát /uveďte příklad !/, že poslední limita existuje, aniž existuje konečný Lebesgueův integrál $\int\limits_M f$. V tomto případě limitu $\lim\limits_{k \to +\infty} \int\limits_{M(k)} f^{(k)}$ budeme nazývat Q-integrálem funkce f přes množinu M. Přesněji, buď $M \subset E_1$, f funkce na M, nechť pro každé $k > 0$ jest $f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ a nechť existuje vlastní $\lim\limits_{k \to +\infty} \int\limits_{M(k)} f^{(k)}$. Potom hodnotu $\lim\limits_{k \to +\infty} \int\limits_{M(k)} f^{(k)}$ nazveme Q - integrálem funkce f přes množinu M, značme tento integrál symbolem $(Q) \int\limits_M f$. Nechť dále symbol Q_M znamená systém všech funkcí na množině M, pro něž existuje $(Q) \int\limits_M f$.

Ukažte, že

1/ (Q) $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x}\,dx = 0$ /v nule definujeme funkci libovolně/,

2/ (Q) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ existuje

‖ viz př. 3,4 ‖ ,

3/ $f \in Q_M$, $g \sim f \Rightarrow g \in Q_M$,

4/ $Q_M \subset \Lambda_M$,

5/ $f,g \in Q_M$, $f \leqq g$ na $M \Rightarrow$ (Q) $\int_M f \leqq$ (Q) $\int_M g$,

6/ $f \in Q_M$, $f \geqq 0$ na $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$ a (L) $\int_M f =$ (Q) $\int_M f$

‖ viz cvičení 8,43 , viz též 8,50 - I / ‖ ,

7/ $f \in Q_M$, $a \in E_1 \Rightarrow af \in Q_M$, (Q) $\int_M af = a\,.$ (Q) $\int_M f$,

8/ $f \in Q_M$, $N \subset M$, $N \in \mathcal{M}_1 \not\Rightarrow f \in Q_N$,

‖ viz kupříkladu (Q) $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x}\,dx$ ‖ ,

9/ $f,g \in Q_M \not\Rightarrow f + g \in Q_M$,

10/ $f,g \in Q_M$, $f + g \in Q_M \not\Rightarrow$ (Q) $\int_M f +$ (Q) $\int_M g =$ (Q) $\int_M (f + g)$.

V důsledku posledních tří negativních výsledků je vidět, že Q - integrál nemá potřebné vlastnosti integrálu /tak, jak jsme je formulovali v úvodu první kapitoly/. Z toho důvodu zavedeme následující "zobecněný integrál".

8,47.* Buď f libovolná funkce na množině $M \in \mathcal{M}_1$. Funkci f nazveme B - integrovatelnou na množině M , jestliže

a/ $f \in Q_M$ /tj. je-li f Q - integrovatelná , viz 8,46 /,

b/ $\lim_{y \to +\infty} y\,.\,\mu_1\{x \in M ;\ f(x) > y\} = 0$.

Systém všech B - integrovatelných funkcí na množině M označme symbolem B_M , pro funkce $f \in B_M$ definujeme B - integrál vztahem

$$(B) \int_M f = (Q) \int_M f .$$

Dokažte, že

1/ $\mathcal{L}_M \subset B_M \subset Q_M$

‖ viz k tomuto př. 8,62 ‖ ,

2/ $B_M - \mathcal{L}_M \neq \emptyset$, 3/ $f \in B_M$, $f \geq 0$ $\Longrightarrow$ $f \in \mathcal{L}_M$

‖ viz př. 8,46 - 6/ či 8,50 - I/ ‖,

4/ (B) $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x}\,dx$ neexistuje ,

5/ $f \in B_M$, $g \sim f$ $\Longrightarrow$ $g \in B_M$,

6/ $f \in B_M$, $a \in E_1$ $\Longrightarrow$ $af \in B_M$, (B) $\int_M af = a$. (B) $\int_M f$,

7/ $f,g \in B_M$ $\Longrightarrow$ $(f + g) \in B_M$, (B) $\int_M (f + g) =$ (B) $\int_M f +$ (B) $\int_M g$,

8/ $f \in B_M$, $N \subset M$, $N \in \mathcal{M}_1$ $\not\Longleftrightarrow$ $f \in B_N$.

8,48. Ukážeme ještě jedno "zobecnění" Lebesgueova integrálu. Dokažte však nejdříve následující tvrzení.

Buď $0 \leq a < b \leq +\infty$, $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom pro libovolné $y \in (0,+\infty)$ jest $e^{-xy}.f(x) \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ a

$$(L) \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y \to 0_+} \int_a^b e^{-xy}.f(x)\,dx \; .$$

‖ Ukažte, že

$x \in (a,b)$, $y \in \langle 0,+\infty)$ $\Longrightarrow$ $\left|e^{-xy}.f(x)\right| \leq \left|f(x)\right| \in \mathcal{L}_{(a,b)}$

a použijte kupříkladu větu 60 . ‖

Buď nyní opět $0 \leq a < b \leq +\infty$, buď f funkce definovaná v intervalu (a,b) , nechť

a/ pro každé $y \in (0,+\infty)$ jest $e^{-xy}.f(x) \in \mathcal{L}_{(a,b)}$,

b/ existuje vlastní $\lim_{y \to 0_+} \int_a^b e^{-xy}.f(x)\,dx$.

Systém všech funkcí, vyhovujících oběma těmto podmínkám, značme symbolem $E_{(a,b)}$; pro libovolnou funkci $f \in E_{(a,b)}$ pak definujme její E - integrál přes interval (a,b) vztahem

$$(E) \int_a^b f = \lim_{y \to 0_+} \int_a^b e^{-xy}.f(x)\,dx \; .$$

Dokažte, že

1/ $\mathcal{L}_{(a,b)} \subset E_{(a,b)} \subset \Lambda_{(a,b)}$,

2/ $f,g \in E_{(a,b)}$, $\alpha, \beta \in E_1$ $\Longrightarrow$ $\alpha f + \beta g \in E_{(a,b)}$,

$$(E) \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha (E) \int_a^b f + \beta (E) \int_a^b g \; ,$$

3/ $f \in E_{(a,b)} \quad \not\Rightarrow \quad |f| \in E_{(a,b)}$,

4/ $f \in E_{(a,b)}$, $\quad f \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$

‖ dokažte přímo či použijte 8,50 - I/ ‖ ,

5/ $(E)\int_0^\infty \sin x\,dx = 1$, $\quad (E)\int_0^\infty \cos x\,dx = 0$

‖ viz 4,47 a 4,48 ‖ ,

6/ $(E)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

‖ viz 6,22 ‖,

7/ $(E)\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x}\,dx$ neexistuje

‖ viz 6,72 ‖ ,

8/ $(E)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x.\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2\pi}$, $\quad (E)\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

‖ viz 6,75 ‖.

8,49. O dalších "zobecněných" integrálech se zde nebudeme zmiňovat. O třech velmi důležitých případech je možno se dočíst v knihách V. Jarník, Integrální počet I /nevlastní Riemannův integrál/, V. Jarník, Integrální počet II /nevlastní Lebesgueův integrál, Perronův integrál/. Porovnejte navzájem jednotlivé "zobecněné" integrály !!

8,50.* Buď $M \in \mathcal{M}_1$, symbolem T_M označme systém všech funkcí na množině M takových, že

a/ $\mathcal{L}_M \subset T_M \subset \Lambda_M$.

Nechť každé funkci $f \in T_M$ je přiřazeno jisté reálné číslo - značme toto symbolem $(T)\int_M f$ - tak, že

b/ $f \in \mathcal{L}_M \Longrightarrow (L)\int_M f = (T)\int_M f$,

c/ $f, g \in T_M$, $f \leq g$ na $M \Rightarrow (T)\int_M f \leq (T)\int_M g$

/lze tedy říci, že $(T)\int_M$ je jakýsi "zobecněný integrál", i když se nepředpokládá např. ani linearita/.

Potom platí

(I) $f \in T_M$, $f \geq 0$ na $M \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{L}_M$.

Dokažte !

‖ Buď $f \in T_M$, $f \geq 0$. Potom $f \in \mathcal{L}_M^{\mathcal{R}}$. Pro libovolné $k > 0$ funkce $f^{(k)}$ definovaná předpisem

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M \cap \langle -k,k \rangle \text{ , je-li } f(x) \leq k \text{ ,} \\ k & \text{pro } x \in M \cap \langle -k,k \rangle \text{ , je-li } f(x) > k \text{ ,} \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in M \end{cases}$$

leží v systému $\mathcal{L}_M$ /ukažte ! , viz též 8,43 /, tedy podle předpokladu je $f^{(k)} \in T_M$. Ze vztahu $f^{(k)} \leq f$ pak plyne , že

$$(L) \int_M f^{(k)} = (T) \int_M f^{(k)} \leq (T) \int_M f \text{ .}$$

Odtud např. podle Leviho věty $/f^{(k)} \nearrow f$ / plyne, že $f \in \mathcal{L}_M$ ‖.

Poznámky.

1/ Jelikož všechny zobecněné integrály /Q - , B - , E - / splňovaly vlastnosti a/, b/, c/, vyplývá odtud, že funkce, mající "nový zobecněný" integrál a nemající Lebesgueův integrál, mohou být pouze funkce, které mění svoje znaménko /viz 8,46 - 6/, 8,47 - 3/ , 8,48 - 4/, viz též obdobný příklad 3,22 - b/ /.

2/ Ukažte, že také platí:

$$(II) \quad f \in T_M - \mathcal{L}_M \implies |f| \notin \widehat{T_M}$$

‖ kdyby $|f| \in T_M$, bylo by podle I též $|f| \in \mathcal{L}_M$ a podle věty 44 též $f \in \mathcal{L}_M$ ‖ ,

$$(III) \quad f \in T_M - \mathcal{L}_M \implies (L) \int_M |f| = +\infty$$

‖ plyne okamžitě z předchozího, srovnej pro zajímavost se cvičením 3,22 - c/ ‖.

Je tedy vidět, že zobecněné integrály, které nejsou Lebesgueovými integrály, jsou vlastně "neabsolutně" konvergentní integrály. Lebesgueův integrál je pak podle věty 44 "absolutně" konvergentní. /Srovnejte též s teorií řad a s teorií zobecněných součtů !/.

8,51.* Uvedeme nyní příklad omezené funkce f na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ takové, že existuje $(N) \int_0^1 f$ a neexistuje $(R) \int_0^1 f$.

Protože Riemannův integrál $(R) \int_0^1 f$ nemá existovat, musí mít množina bodů nespojitosti funkce f v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ /podle věty 57/ kladnou míru. Na druhé straně musí existovat primitivní funkce F k funkci f

na intervalu $\langle 0,1\rangle$, tudíž <u>množina bodů spojitosti</u> funkce f musí být <u>hustá</u> v intervalu $\langle 0,1\rangle$ /viz větu v př. 3,3/. Podáme tzv. Volterrův příklad takové funkce f ; nejdříve ovšem musíme sestrojit množinu v intervalu $\langle 0,1\rangle$, která by měla kladnou míru a jejíž doplněk by byl hustý v $\langle 0,1\rangle$. Uveďme následující příklady - konstrukce množin s uvedenými vlastnostmi je sama o sobě zajímavá.

8,52.* /Zobecněné Cantorovo diskontinuum/.

V příkladu 5,7 jsme sestrojili množinu C v intervalu $\langle 0,1\rangle$, tzv. Cantorovo diskontinuum. Ukažte, že $C = \langle 0,1\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, kde E_n je sjednocení disjunktních otevřených intervalů $E_{n,i}$ /$i = 1,2,\dots,2^{n-1}$ /, délka každého intervalu $E_{n,i}$ je 3^{-n} a každý interval $E_{n,i}$ je "umístěn v prostřední třetině" některého z n disjunktních uzavřených intervalů, které tvoří množinu $\langle 0,1\rangle - \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j$ /precizujte !, zřejmě $E_n = \langle 0,1\rangle - R_n$, kde množiny R_n jsou definovány jako v 5,7/.

Buď nyní $k \geq 3$ a proveďme obdobnou konstrukci. Buď $C_k = \langle 0,1\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n je sjednocení otevřených disjunktních intervalů $F_{n,i}$ /$i = 1,2,\dots,2^{n-1}$/, každý z intervalů $F_{n,i}$ má délku k^{-n} . Je-li $F_{n,i} = (a_{n,i} , b_{n,i})$, předpokládáme, že $b_{n,i} < a_{n,j}$, kdykoliv $i < j$ /podejte precizní definici pomocí matematické indukce !/.

Dokažte, že

1/ $C_k \in \mathcal{M}_1$ pro libovolné $k \geq 3$, $\mu_1 C_k = \frac{k-3}{k-2}$,

2/ C_k je uzavřená množina ,

3/ C_k je řídká množina /tj. má prázdný vnitřek/ - anebo jinak řečeno, její doplněk v $\langle 0,1\rangle$ je hustá množina v $\langle 0,1\rangle$,

**4/ $C_k = C_k'$ (kde C_k' je množina všech hromadných bodů množiny C_k),

**5/ jaký bude Jordan - Peanův objem množiny C_k ?

/definici viz v dodatku D III /.

8,53.* Buď $\{x_1 , x_2 , \dots\}$ množina všech racionálních čísel v intervalu $(0,1)$. Zvolme posloupnost reálných čísel δ_k tak, aby

1/ $(x_k - \delta_k , x_k + \delta_k) \subset (0,1)$ pro každé k ,

2/ $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \frac{1}{2}$.

Položme

$$F = \langle 0,1\rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - \delta_k , x_k + \delta_k) .$$

Potom

a/ množina F je uzavřená ,

b/ $F \in \mathfrak{M}_1$ a $\mu_1 F > 0$,

c/ F je řídká množina, tj. množina $\langle 0,1 \rangle - F =$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - \delta_k , x_k + \delta_k) \text{ je hustá v } \langle 0,1 \rangle .$$

**) Jaký bude Jordan - Peanův objem množiny F ? /viz D III /.

8,54.* Buď nyní $A \subset \langle 0,1 \rangle$ libovolná uzavřená, řídká množina kladné míry /viz př. 8,52, 8,53/. Potom množina $\langle 0,1 \rangle - A$ je otevřená, existuje tedy spočetně mnoho disjunktních otevřených intervalů (a_n, b_n) tak, že

$$\langle 0,1 \rangle - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) .$$

Definujme funkci F v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ takto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in A , \\ (x - a_n)^2 (x - b_n)^2 \sin \dfrac{1}{(b_n - a_n)(x-a_n)(x-b_n)} & \text{pro } x \in (a_n, b_n) . \end{cases}$$

Dokažte, že

1/ F je spojitá v intervalu $\langle 0,1 \rangle$,

2/ existuje vlastní derivace F' v $\langle 0,1 \rangle$,

3/ $F'(x) = 0$ pro $x \in A$,

4/ F' je spojitá ve všech bodech množiny $\langle 0,1 \rangle - A$,

5/ F' je nespojitá ve všech bodech množiny A ,

6/ neexistuje $(R) \int_0^1 F'(x)\, dx$,

7/ existuje $(N) \int_0^1 F'(x)\, dx = 0$.

Existuje $(L) \int_0^1 F'(x)\, dx$?

8,55.* Definujte funkci G obdobně jako v minulém př. 8,54 předpisem

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in A , \\ (x - a_n)^2 (b_n - x)^2 \sin \dfrac{1}{(x-a_n)^2 (b_n-x)^2} & \text{pro } x \in (a_n, b_n) . \end{cases}$$

Dokažte, že

1/ G je spojitá v $\langle 0,1 \rangle$,

2/ existuje vlastní derivace G' v $\langle 0,1 \rangle$,

3/ G' je spojitá ve všech bodech množiny $\langle 0,1 \rangle - A$ a nespojitá ve všech bodech množiny A ,

4/ neexistuje $(R) \int_0^1 G'(x)\, dx$,

5/ $(N) \int_0^1 G'(x)\, dx = 0$,

6/ je-li $x \in A$, je $G'(x) = 0$ a funkce G' je neomezená v libovolném okolí bodu x .

Existuje $(L) \int_0^1 G'(x)\, dx$?

8,56.* Buď $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ množina všech racionálních čísel v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ označme

$$F_i(\varepsilon) = \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} ,\ x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right) ,\quad i=1,2,\dots .$$

Položme dále

$$F(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(\varepsilon) ,$$

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)$$

Dokažte, že

1/ $F(\varepsilon)$ je otevřená množina pro každé $\varepsilon > 0$,

2/ $\mu_1(F(\varepsilon)) \leq \varepsilon$,

3/ F je nespočetná množina ,

4/ $F \in \mathfrak{M}_1$ a $\mu_1 F = 0$.

8,57.* Buď $E \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r E < +\infty$, $f \in \Lambda_E$, $f \geq 0$; označme $E_k = \{x \in E ;\ k \leq f(x) < k+1\}$ pro libovolné k .

Potom

$$f \in \mathcal{L}_E \iff \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mu_r E_k \text{ konverguje .}$$

Dokažte !

1/ Ukažte nejdříve, že $E_k \in \mathfrak{M}_r$ pro každé $k \in E_1$.

2/ Platí

$$k \,.\, \mu_r E_k \leq \int_{E_k} f \leq (k+1) \,.\, \mu_r E_k \,.$$

3/ Dále ukažte, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \,.\, \mu_r E_k \leq \int_E f \leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \,.\, \mu_r E_k \,.\,\|$$

Co lze tvrdit v případě, že $\mu_r E = +\infty$? Lze uvedenou větu zobecnit i na obecnější prostory ? Kdy ?

8,58.* Buď $E \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r E < +\infty$, $f \geq 0$, $f \in \Lambda_E$; označme $F_k = \{x \in E ;\ f(x) \geq k\}$ pro $k \in E_1$.

Potom

$$f \in \mathcal{L}_E \iff \sum_{k=1}^{\infty} \mu_r F_k \text{ konverguje .}$$

$\|$ Ukažte, že $F_k = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_{k+i}$, kde množiny E_j jsou definovány stejně jako v předchozí úloze 8,57. Poté použijte 8,57 . $\|$

8,59. Buď $E \in \mathfrak{M}_r$, $f \in \mathcal{L}_E$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ je $\mu_r\{x \in E ;\ f(x) \geq \varepsilon\} < +\infty$. Dokažte !

$\|$ Buď $\varepsilon > 0$, označte $M_\varepsilon = \{x \in E ;\ f(x) \geq \varepsilon\}$.

Použijte vztahu

$$\int_E |f| = \int_{M_\varepsilon} |f| + \int_{E-M_\varepsilon} |f| \geq \int_{M_\varepsilon} |f| \geq \varepsilon \,.\, \mu_r M_\varepsilon$$

a věty 44 . $\|$

8,60.* Buď $f \in \Lambda_E$, $E \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r E < +\infty$.

Potom

$$f \in \mathcal{L}_E \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mu_r\{x \in E ;\ |f(x)| \geq n\} \text{ konverguje .}$$

8,61.* Buď $f \in \Lambda_E$, $E \in \mathfrak{M}_r$, $H_n = \{x \in E ;\ n-1 \leq f(x) < n\}$.

Potom

$$f \in \mathcal{L}_E \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \ \mu_r H_n \text{ konverguje .}$$

8,62.* Buď $f \in \mathcal{L}_E$, $E \in \mathfrak{M}_r$, $K_n = \{x \in E ;\ |f(x)| \geq n\}$.

Potom $\lim_{n\to+\infty} n \,.\, \mu_r K_n = 0$. Dokažte !

8,63. <u>Gamma funkce</u>.

Funkci Γ jsme definovali předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}\,dx$$

a ukázali jsme, že funkce Γ je definována pro $s \in (0,+\infty)$, je na tomto intervalu spojitá a má zde derivace všech řádů. Dále jsme dokázali, že $\lim_{s \to 0+} \Gamma(s) = \lim_{s \to +\infty} \Gamma(s) = +\infty$ /viz příklady 3,43, 4,18, 6,24 /.

Ukažte dále, že

1/ $\Gamma(s+1) = s.\,\Gamma(s)$ pro $s \in (0,+\infty)$,

2/ $\Gamma(n+1) = n\,!$ pro n přirozené,

3/ $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$,

4/ existuje bod $x_0 \in (1,2)$ tak, že $\Gamma'(x_0) = 0$

⌈ použijte Rolleovu větu na interval $(1,2)$ ⌋,

5/ v intervalu $(0,x_0)$ je funkce Γ klesající,
v intervalu $(x_0,+\infty)$ rostoucí, v bodě x_0 nabývá svého minima

⌈ ukažte, že $\Gamma'' > 0$ v intervalu $(0,+\infty)$, tedy že funkce Γ' je v intervalu $(0,+\infty)$ rostoucí a využijte toho, že $\Gamma'(x_0) = 0$ ⌋,

6/ $\lim_{y \to 0_+} y.\,\Gamma(y) = 1$

⌈ ukažte, že $\int_0^{\infty} e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n}\,\Gamma(\frac{1}{n})$
a že $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n}\,dx = 1$ - viz př. 4,22 ⌋,

7/ $\int_0^1 \log\,\Gamma(x)\,dx$ konverguje

⌈ využijte předchozího výsledku 6/ ⌋

O mnoha dalších zajímavých vlastnostech funkce Γ se lze dočíst v knize V.Jarník, Integrální počet II, kap. XVIII .

8,64. Vyšetřujte integrál $I(a) = \int_0^{\pi} \log\,(1-2a\cos x + a^2)\,dx$!
Ukažte, že

1/ $a \in E_1 \Rightarrow I(a)$ konverguje ,

2/ I je spojitá funkce v E_1 ,

3/ I je funkce sudá v E_1 ,

4/ označíte-li pro každé přirozené $n \in N$

$$P_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\,,\quad P_n(1) = P_n(-1) = n\,,$$

jest $(R)\int_0^{\pi} \log(1-2a\cos x + a^2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \log P_n(a)$

‖ nejdříve ukažte, že

$$\frac{t^{2n}-1}{t^2-1} = \left(1-2t\cos\frac{\pi}{n}+t^2\right).\left(1-2t\cos\frac{2\pi}{n}+t^2\right) \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \left(1-2t\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+t^2\right) \quad \text{pro} \quad t \neq \pm 1$$

a poté použijte definici Riemannova integrálu,

$$(R)\int_0^{\pi} \log(1-2a\cos x + a^2)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \log\left(1-2a\cos\frac{\pi i}{n} + a^2\right)$$ ‖ ,

5/ $$I(a) = \begin{cases} 0 & \text{pro } a \in \langle -1,+1\rangle, \\ 2\pi \log|a| & \text{pro } |a| > 1 \end{cases}$$

‖ použijte vztahu 4/ , limitu lehko spočtete ‖ ,

6/ $I(a) = \frac{1}{2} I(a^2) = \frac{1}{4} I(a^4) = \ldots\ldots$

‖ $2.I(a) = I(a) + I(-a) = \frac{1}{2} I(a^2) + \frac{1}{2} I(-a^2) = I(a^2)$

a dále třeba indukce ‖ ,

7/ $I\left(\frac{1}{a}\right) = I(a) - 2\pi \cdot \log|a|$

‖ přímý výpočet ‖ ,

8/ $I(a) = 0$ pro $a \in \langle -1,+1\rangle$,

‖ funkce I je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$,

buď $M = \max_{a\in\langle -1,+1\rangle} I(a)$,

potom z 6/ plyne, že

$$|I(a)| = \left|\frac{1}{2^n} I(a^{2^n})\right| \leq \frac{M}{2^n} \quad \text{pro každé } n \in N,$$

odtud již lehko plyne tvrzení ‖ ,

9/ $I(a) = 2\pi \cdot \log|a|$ pro $|a| > 1$

‖ plyne snadno z 7/ a 8/ ‖

10/ $I(1) = \pi \cdot \log 4 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\,dt$, 11/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt = -\frac{\pi}{2} \log 2$

⟦ plyne z 10/ vzhledem k podmínce $I(1) = 0$,
viz též př. 5,87, 6,30 ⟧,

12/ $a \in (-1,+1) \Rightarrow I'(a) = \int_0^{\pi} \frac{-2\cos x + a^2}{1-2a\cos x + a^2} \, dx = 0$

⟦ substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ⟧ ,

13/ $I(a) = 0$ pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$

⟦ plyne okamžitě z 12/ vzhledem k podmínce $I(0) = 0$ ⟧ .

8,65.* Ukážeme nyní jednu velmi zajímavou vlastnost systému C_r /systém C_r jsme definovali jako systém všech spojitých funkcí v E_r , jejichž nosič je omezená množina v E_r /.
Dokažte následující větu.

Buď A libovolný funkcionál na systému C_r , který splňuje axiomy $4_A - 6_A$ (někdy se říká, že A je positivní lineární funkcionál na C_r).
Potom funkcionál A splňuje i axiom 7_A .

⟦ Ukažte nejdříve, že ke každé kompaktní množině $K \subset E_r$ existuje konstanta M_K taková, že

$$\left| Af \right| \leq M_K \cdot \sup \left\{ \left| f(x) \right| ; \ x \in E_r \right\}$$

pro všechny funkce $f \in C_r$ pro něž $N(f) \subset K$

/$N(f)$ je nosič funkce f/.
Odtud již tvrzení vyplyne s pomocí Diniho věty ⟧.

8,66.** Cvičení 8,65 je možno ještě zobecnit.
Buď S libovolný lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, symbolem $C(S)$ označme systém všech spojitých reálných funkcí na S /tj. zobrazení S do E_1/, nosič každé z nichž /viz definice 7,25/ je obsažen v nějaké kompaktní podmnožině S . Lehko ukážete, že systém funkcí $C(S)$ splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$. Buď A libovolný funkcionál na systému $C(S)$, který splňuje axiomy $4_A - 6_A$.
Potom funkcionál A splňuje i axiom 7_A . Ukažte, že je též splněn Stoneův axiom 8_S /viz 8,11/.

8,67.* Dokažte následující zajímavou charakteristiku nulových množin /definici viz před větou 11 /.

Množina $M \subset P$ je nulová, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost funkcí $f_n \in Z$ s vlastnostmi

a/ $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots\ldots$ na P ,

b/ $Af_n < \varepsilon$ pro všechna $n \in N$,

c/ $\sup\limits_{n \in N} f_n(x) \geq 1$ pro všechna $x \in M$.

$\boxed{8{,}68.^*}$ Buď $A \subset P$; předpokládejme, že množina A není měřitelná, tj. $A \notin \mathfrak{M}$. Buď f taková funkce, že $f = 0$ na A, $f \neq 0$ na $P - A$. Může být $f \in \mathcal{L}$, resp. $f \in \Lambda$?
Kdy ?

$\boxed{8{,}69.^*}$ Dokažte následující věty.

I/ Ke každému $\varepsilon > 0$ a každé funkci $f \in \mathcal{L}$ existuje funkce $g \in Z$ tak, že $A\,|f - g| < \varepsilon$.

II/ Buď $P \in \mathfrak{M}$, potom ke každému $\varepsilon > 0$ a každé funkci $f \in \mathcal{L}$ existuje jednoduchá funkce g /viz 7,27/, pro niž $\mu(N(g)) < +\infty$ /definici viz v 7,25/ a $A\,|f - g| < \varepsilon$.

I/ Viz skripta I. Černý - J.Mařík, Integrální počet I , odstavec 2,9 . Viz též cvičení 8,15 - 8/.

II/ Dokažte pomocí cvičení 8,42 /či 7,38/ a předchozí části I/.

$\boxed{8{,}70.^*}$ V tomto cvičení předpokládejme, že $Z = C_1$, Af = Riemannův integrál přes E_1 . Dokažte následující větu.

Buď $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$ a funkce φ taková, že

a/ φ je elementární jednoduchá funkce v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ /viz 7,43/,

b/ $\varphi = 0$ vně intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$,

c/ $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon$.

1/ Použijte 8,69 - I/, definici systémů $\mathcal{L}_{(a,b)}$ a C_1 a poznatku, že libovolná funkce ze systému C_1 je stejnoměrně spojitá v E_1 .

2/ Použijte též 8,69 - II/ ; stačí potom ukázat, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ a k libovolné omezené měřitelné množině $E \subset E_1$ existuje konečně mnoho disjunktních intervalů $J_1, \ldots, J_n$ takových, že

$$\int_a^b \left| c_E(x) - c_J(x) \right| dx < \varepsilon \quad , \text{ kde } J = \bigcup_{i=1}^{n} J_i \; .$$

K důkazu posledního tvrzení použijte cv. 5,5 .

8,71.* Podejme ještě jeden zajímavý příklad tzv. Cantorovy funkce. Buď C Cantorovo diskontinuum /viz př. 5,7/. Ponechme označení $E_{n,i}$ /to jsou vlastně "styčné intervaly" množiny C/, E_n z příkladu 8,52 ; je-li $E_{n,i} = (a_{n,i} \, ; \, b_{n,i})$, předpokládejme navíc, že $b_{n,i} < a_{n,j}$ kdykoliv $i < j$.

Definujme nyní funkci f na intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Položme

$$f(x) = \frac{2i - 1}{2^n} \quad \text{pro} \quad x \in E_{n,i} \, , \quad i = 1,\dots,2^{n-1} \, , \quad n \in N \, .$$

Tím je funkce f definována na $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ukažte, že

α / $x,y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \, , \; x < y \implies f(x) \leq f(y)$.

Dále definujeme $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Je-li $x \in (0,1)$ a není-li ještě $f(x)$ definováno /v jakých bodech ještě není funkce f definována ?/, existuje rostoucí posloupnost $x_n \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $x_n \nearrow x$. Ukažte, že

β / $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ existuje ,

γ / je-li $x_n , y_n \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $x_n \nearrow x$, $y_n \nearrow x$,

jest $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$.

Definujeme tedy $f(x)$ jako hodnotu limity $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.
Ukažte dále, že

δ / funkce f je neklesající a spojitá v $\langle 0,1 \rangle$,

ε / $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, tj. $f' = 0$ skoro všude v intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Podali jsme tedy příklad spojité nekonstantní funkce v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, pro kterou $f' = 0$ sk. vš. v $\langle 0,1 \rangle$.
Viz též dodatek D IV.5.