7. Jiná pojetí Lebesgueova integrálu.

7,1. V této kapitole ukážeme, jak lze vybudovat teorii Lebesgueova integrálu, vyjdeme-li z prvotního pojmu míry. Bylo by vhodné, kdyby si čtenář nejdříve prostudoval dodatek ke 4.kapitole ve skriptech I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I , kde se autoři tímto problémem zabývají - ovšem pouze za omezujících předpokladů /uvažují totiž pouze podmnožiny eukleidovského prostoru/.

Zopakujeme ještě jednou, jak jsme my vybudovali teorii integrálu a míry. Vyšli jsme ze základního prostoru (Z,A) , tj. ze základního systému funkcí na němž byl definován základní funkcionál A , tento prostor jsme rozšířili a obdrželi jsme systém $\mathcal{L}$ všech funkcí s konečným abstraktním integrálem A ; pomocí tohoto systému jsme pak definovali systém všech měřitelných funkcí Λ , systém všech měřitelných množin $\mathfrak{M}$ a míru μ na $\mathfrak{M}$. Celému tomuto abstraktnímu postupu říkejme krátce <u>Daniellova metoda</u>, abstraktnímu rozšíření pak <u>Daniellovo rozšíření</u>.

Jestliže jsme zvolili za základní systém Z systém všech spojitých funkcí C_r s kompaktním nosičem v E_r a za základní funkcionál A Riemannův integrál přes E_r , dostali jsme speciální teorii, a sice teorii Lebesgueova integrálu v E_r ; systému $\mathcal{L}$ odvozenému v této teorii jsme říkali systém všech funkcí s konečným Lebesgueovým integrálem, mluvili jsme též o systému $\mathfrak{M}_r$ všech lebesgueovsky měřitelných množin v E_r i o Lebesgueově míře μ_r .

Při budování teorie Lebesgueova /či abstraktního- integrálu je možno také zvolit postup zcela opačný, tj. je možno vyjít z teorie míry a na základě této teorie pak vybudovat teorii integrálu. V dalším naznačíme, jak toto lze provést. Vzhledem k tomu, že tato kapitola má však pouze problémový charakter, omezíme se v dalším jen na stručné myšlenky, není možné na tomto místě vybudovat celou teorii detailně. Je nutno také předem upozornit na skutečnost, že mnozí autoři se zabývají těmito problémy za různých předpokladů a bývá jejich snahou vybudovat celou teorii pokud možno co nejobecněji. Domnívám se, že není účelem této kapitoly upozornit na všechny možné detaily různých teorií, budeme proto v dalším používat často značně omezujících předpokladů a nebudeme se uvedenou problematikou zabývat v celé šíři.

A ještě jednu poznámku. Tak jako při Daniellově metodě jsme mohli vyjít z abstraktního prostoru (Z,A) či tento specifikovat - mohli jsme vyjít z konkretního systému C_r všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem v E_r a z Riemannova integrálu - tak také při opačném postupu můžeme vyjít z abstraktní teorie míry anebo ze speciálního případu - Lebesgueovy míry v E_r. Aby se čtenář v této kapitole lépe orientoval, budeme za čísly jednotlivých odstavců vždy uvádět, zda se jedná o obecnou teorii či o speciální teorii v eukleidovských prostorech. Několik odstavců bude pak vyhraženo cvičením.

7,2. /obecně/: Definice σ - okruhu

Buď dána libovolná neprázdná množina X. Neprázdný systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X nazveme /množinovým/ σ - okruhem, jestliže platí:

1/ $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S} \Rightarrow A - B \in \mathcal{S}$,

2/ $A_n \in \mathcal{S}$ $(n = 1,2,\dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

To znamená, že σ - okruh $\mathcal{S}$ se svými libovolnými dvěma množinami obsahuje i jejich rozdíl a se spočetně mnoha množinami i jejich sjednocení.

Je-li navíc ještě $X \in \mathcal{S}$, budeme systému $\mathcal{S}$ říkat σ -algebra.

7,3. /cvičení/.

Buď $\mathcal{S}$ σ - okruh podmnožin množiny X. Ukažte, že platí:

a/ $\emptyset \in \mathcal{S}$,

b/ $A_n \in \mathcal{S}$ $(n = 1,2,\dots) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

7,4. /cvičení/.

Rozhodněte, zda následující systémy podmnožin množiny X tvoří σ - okruh:

a/ systém všech omezených podmnožin eukleidovského prostoru E_r,

b/ systém všech spočetných podmnožin E_1,

c/ systém všech otevřených podmnožin metrického prostoru,

d/ systém všech uzavřených podmnožin metrického prostoru,

e/ systém všech kompaktních podmnožin metrického prostoru,

f/ systém všech jednobodových množin v E_1,

g/ systém všech podmnožin dané množiny X,

h/ systém $\mathfrak{M}$ všech měřitelných podmnožin základní množiny P získaný při Daniellově rozšíření /tvoří $\mathfrak{M}$ σ - algebru ?, viz např. 2,5; 2,10/.

7,5. /obecně, cvičení/. <u>Definice generovaného σ - okruhu</u>.

Jako cvičení ukažte následující :

A/ průnik libovolného systému σ - okruhů podmnožin množiny X je opět σ - okruh podmnožin množiny X ,

B/ systém všech podmnožin dané množiny X tvoří σ - okruh /viz př. 7,4 g/,

C/ buď $\mathcal{U}$ libovolný systém podmnožin množiny X , potom existuje právě jeden σ - okruh $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X takový, že

1/ $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$,

2/ je-li $\mathcal{S}'$ libovolný σ - okruh podmnožin množiny X takový, že $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}'$, potom $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.

⌈ Vezměte všechny σ - okruhy, které obsahují $\mathcal{U}$, podle B existuje alespoň jeden, a utvořte jejich průnik ⌋ .

Je-li tedy $\mathcal{U}$ libovolný systém podmnožin množiny X , existuje podle předešlého nejmenší σ - okruh $\mathcal{S}$ obsahující $\mathcal{U}$. Značme tento σ - okruh symbolem $\sigma(\mathcal{U})$, budeme říkat, že $\sigma(\mathcal{U})$ je <u>generován</u> /vytvořen/ systémem $\mathcal{U}$.

Ukažte, že

D/ je-li $\mathcal{U}$ σ - okruh, potom $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

Zkoumejte též, jaké σ - okruhy generují systémy množin ve cvičeních 7,4 a/ - h/ .

7,6. /eukleidovské prostory/. <u>Borelovské množiny.</u>

Označme symbolem $\mathcal{O}_n$ systém všech otevřených množin v E_n . Jak lehko nahlédnete /viz 7,4 c/ , netvoří systém $\mathcal{O}_n$ σ - okruh. Podle 7,5 však existuje nejmenší σ - okruh podmnožin E_n takový, že obsahuje systém $\mathcal{O}_n$, tj. všechny otevřené množiny. Značme tento systém symbolem $\mathcal{B}_n$ /tj. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O}_n)$ / a jeho prvky nazývejme borelovskými množinami E_n .

Ukažte, že

1/ $F \subset E_n$ uzavřená množina $\Rightarrow$ $F \in \mathcal{B}_n$ /každá uzavřená množina je borelovská/,

2/ systém $\mathcal{B}_n$ všech borelovských množin je též generován systémem všech uzavřených množin, tj. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{U}_n)$, kde $\mathcal{U}_n$ značí systém všech uzavřených podmnožin E_n ,

3/ systém $\mathcal{B}_n$ je též generován systémem všech kompaktních množin v E_n , 4/ $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$, tj. každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná

[podle věty 50 je každá otevřená množina měřitelná, tj. $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{M}_n$, podle 7,4 g tvoří $\mathcal{M}_n$ σ - okruh a systém $\mathcal{B}_n$ je nejmenší σ - okruh obsahující $\mathcal{O}_n$] ,

5/ $\mathcal{B}_n$ je dokonce σ - algebra ,

6/ označíme-li symbolem $\mathcal{J}_1$ systém všech otevřených intervalů $(a,b) \subset E_1$, je $\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{J}_1)$,

7/ množina všech racionálních čísel v E_1 je borelovská,

8/ množina všech iracionálních čísel v E_1 je borelovská,

**9/ podmnožina borelovské množiny nemusí být borelovská,

**10/ množina všech borelovských podmnožin E_n má mohutnost kontinua /tj. $2^{\aleph_0}$ / ,

**11/ existují měřitelné množiny, které nejsou borelovské, tj. není $\mathcal{B}_n = \mathcal{M}_n$

[množina všech podmnožin Cantorova diskontinua C - viz př. 5,7 - má mohutnost $2^{\aleph_1}$ a každá podmnožina C je měřitelná .]

7,7. /obecně/. <u>Definice míry.</u>

<u>Množinovou funkcí</u> rozumíme funkci, jejíž definiční obor tvoří nějaký systém množin /tj. zobrazení, které určitým množinám přiřazuje hodnoty z E_1^*/. Mírou μ rozumíme takovou množinovou funkci, že

1/ definičním oborem μ je nějaký σ - okruh $\mathcal{S}$ /tj. existuje takový σ - okruh $\mathcal{S}$, že pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$ je definováno μA /,

2/ $A \in \mathcal{S} \Rightarrow \mu A \geqq 0$ / μ je nezáporná funkce/,

3/ $\mu(\emptyset) = 0$,

4/ μ je σ - aditivní na $\mathcal{S}$, tj. jsou-li $A_n \in \mathcal{S}$ disjunktní množiny, potom $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

7,8. /cvičení/.

Zkoumejte, zda následující množinové funkce jsou míry:

1/ $X = E_1$, $\mathcal{S}$ = systém všech podmnožin E_1 ,

$$\mu E = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } 0 \in E , \\ 0 & \text{jestliže } 0 \notin E , \end{cases}$$

2/ $X = N$ /množina všech přirozených čísel/,

$\mathcal{S}$ = systém všech podmnožin N ,

$$\mu E = \begin{cases} n & \text{jestliže } E \subset N \text{ je konečná množina obsahující právě } n \text{ prvků ,} \\ +\infty & \text{jestliže } E \subset N \text{ je nekonečná množina ,} \end{cases}$$

3/ X , $\mathcal{S}$ definujme stejně jako v předešlém příkladě ,

$$\mu E = \begin{cases} 0 & \text{je-li } E = \emptyset \text{ ,} \\ +\infty & \text{je-li } E \text{ nekonečná} \\ \sum_{n \in E} \frac{1}{n^2} & \text{je-li } E \neq \emptyset \text{ konečná,} \end{cases}$$

4/ míra μ na systému všech měřitelných množin $\mathfrak{M}$ /viz definici za větou 12 a věty 14, 15 /,

5/ X je libovolná množina, $\mathcal{S}$ libovolný σ - okruh podmnožin množiny X ,

$$\mu E = \begin{cases} 0 & \text{je-li } E = \emptyset \text{ ,} \\ +\infty & \text{je-li } E \in \mathcal{S} \text{ , } E \neq \emptyset \text{ .} \end{cases}$$

7,9. /cvičení/.

Buď μ míra na σ - okruhu $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X .
Potom

a/ $A , B \in \mathcal{S} , A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$,

b/ $A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$,

c/ $A_n \in \mathcal{S}$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu A = \lim_{n \to \infty} \mu A_n$,

d/ $A_n \in \mathcal{S}$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$,

$\mu A_1 < +\infty \Rightarrow \mu A = \lim_{n \to \infty} \mu A_n$.

Dokažte tato tvrzení z definice míry v 7,7 ! Srovnejte též s větami 15, 16, 17 .

7,10.* /obecně/. <u>Definice úplné míry.</u>

Buď μ míra na σ - okruhu $\mathcal{S}$. Ukažte na příkladě, že nemusí být splněna následující podmínka:

$$(*) \quad \mu E = 0 \; , \quad F \subset E \implies F \in \mathcal{S} \quad / \text{a} \quad \mu F = 0 \; / \; .$$

Je-li splněna podmínka $(*)$, říkáme, že μ je <u>úplná míra na $\mathcal{S}$</u> .

7,11. /cvičení/.

Ukažte, že míra μ odvozená v Daniellově rozšíření je úplná na $\mathcal{M}$ /viz př. 5,10/.

7,12. (obecně/. <u>Definice vnější míry.</u>

Buď X libovolná množina. <u>Vnější mírou μ^*</u> na X nazveme libovolnou množinovou funkci takovou, že

1/ μ^* je definována na systému všech podmnožin množiny X
/tj. každé množině $A \subset X$ je přiřazeno číslo $\mu^* A \in E_1$ / ,

2/ $A \subset X \implies \mu^* A \geq 0$ / μ^* je nezáporná/,

3/ $\mu^*(\emptyset) = 0$,

4/ $A \, , \; E_n \subset X \, , \; A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* E_n$.

7,13. /cvičení/.

Zkoumejte, zda následující množinové funkce jsou vnější míry:

1/ funkce μ z př. 7,8 - část 1/ - 3/ ,

2/ libovolná míra definována na systému všech podmnožin množiny X ,

3/ X je nespočetná množina ,

$$\mu^* E = \begin{cases} 0 & \text{je-li } E \text{ spočetná ,} \\ 1 & \text{je-li } E \subset X \text{ nespočetná ,} \end{cases}$$

4/ X je libovolná množina,

$$\mu^* E = \begin{cases} 0 & \text{pro } E = \emptyset \; , \\ 1 & \text{pro } \emptyset \neq E \neq X \; , \\ 2 & \text{pro } E = X \; , \end{cases}$$

5/ $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

$$\mu^* E = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1} & \text{je-li } E \text{ konečná množina, která obsahuje právě } n \text{ prvků,} \\ 1 & \text{je-li } E \text{ nekonečná množina,} \end{cases}$$

6/ $X = E_1$; buď $B = \left\{ \frac{1}{n} ;\ n = 1,2,3,\ldots \right\}$.

$$\mu^* E = \begin{cases} n & \text{obsahuje-li množina } E \cap B \text{ právě } n \text{ prvků} \\ +\infty & \text{je-li množina } E \cap B \text{ nekonečná,} \end{cases}$$

/viz též př. 2,17/,

7/ X je libovolná množina ,

$$\mu^* E = \begin{cases} 0 & \text{pro } E = \emptyset , \\ 2 & \text{obsahuje-li } E \subset X \text{ právě jeden prvek} \\ n & \text{obsahuje-li množina } E \subset X \text{ právě } n \text{ prvků , } n \geq 2 , \\ +\infty & \text{je-li } E \subset X \text{ nekonečná ,} \end{cases}$$

8/ vnější míra $\tilde{\mu}$ odvozená v teorii Daniellova rozšíření /viz definici za větou 11 /.

$\boxed{7,14.^*}$ /obecně/.

Buď X metrický prostor, μ^* vnější míra na podmnožinách množiny X , která navíc splňuje axiom

(M) : E_1 , $E_2 \subset X$ neprázdné množiny, které mají kladnou vzdálenost $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^* E_1 + \mu^* E_2$ /vzdálenost $d(E_1 , E_2)$ dvou množin E_1 , E_2 se definuje takto:

$$d(E_1 , E_2) = \inf \ \rho(x,y) , \qquad x \in E_1 , \ y \in E_2 ,$$

kde ρ je metrika v X /.

Potom říkáme, že μ^* je <u>metrická</u> vnější míra.

$\boxed{7,15.}$ /obecně - důležité !/. <u>Definice μ^* - měřitelných množin</u> .

Buď μ^* vnější míra na podmnožinách množiny X . Množina $E \subset X$ se nazývá μ^* - měřitelná /podle Caratheodoryho/, právě když

$$\mu^* T = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T - E)$$

pro libovolnou množinu $T \subset X$ /kreslete!/.

Systém všech μ^*- měřitelných množin značme symbolem $\mathfrak{M}(\mu^*)$.

Platí následující velmi důležitá věta, pokuste se ji dokázat!

$\boxed{7{,}16.^*}$ /obecně/. **Věta.**

1/ Systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ všech μ^*- měřitelných množin tvoří σ - okruh podmnožin množiny X .

2/ $X \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, tj. systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ tvoří dokonce σ - algebru.

3/ Definujeme-li funkci μ na $\mathfrak{M}(\mu^*)$ předpisem

$$\mu E = \mu^* E \quad \text{pro} \quad E \in \mathfrak{M}(\mu^*) ,$$

je μ úplná míra na $\mathfrak{M}(\mu^*)$ /viz definice 7,7 a 7,10/. Říkáme též, že míra μ je indukována vnější mírou μ^* na $\mathfrak{M}(\mu^*)$.

4/ Je-li X metrický prostor, μ^* metrická vnější míra /viz 7,14/, potom je každá otevřená podmnožina X μ^*- měřitelná. Speciálně - označíme-li si symbolem $\mathcal{B}$ σ- okruh generovaný systémem všech otevřených podmnožin prostoru X , je $\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}(\mu^*)$ - odůvodněte!

$\boxed{7{,}17.}$ /cvičení/.

Zkoumejte, jak budou vypadat systémy $\mathfrak{M}(\mu^*)$ všech μ^*- měřitelných množin v jednotlivých případech cvičení 7,13 !

‖ K části 7 - všimněte si, že systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ všech μ^*- měřitelných množin podle naší definice 7,13 se nemusí shodovat se systémem $\mathfrak{M}$ všech měřitelných množin získaných v Daniellově rozšíření, neboť podle 7,16 jest vždy $P \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, zatímco nemusí být $P \in \mathfrak{M}$ - viz příklady 2,5 ; 2,10 aj. Viz též cvič. 8,30 . ‖

V dalším by bylo možné se zabývat otázkami vytváření vnější míry, otázkami rozšiřování a zúplňování míry aj., které však v dalším zcela opomineme. Ukážeme pouze, jak těmito postupy můžeme dospět k Lebesgueově míře v E_n .

$\boxed{7{,}18.}$ Lebesgueova míra v eukleidovských prostorech.

Buď dán otevřený interval $I \subset E_n$, tj. kartézský součin n jednorozměrných otevřených intervalů, $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots\ldots \times (a_n , b_n)$. Objemem intervalu I nazveme číslo

$$\mathrm{vol}\,(I) = (b_1 - a_1) \,.\, (b_2 - a_2) \,.\, \ldots \,.\, (b_n - a_n) .$$

Můžeme předpokládat /není to nutné/, že budeme uvažovat pouze omezené otevřené intervaly.

Je-li dána libovolná množina $E \subset E_n$ a je-li $\{ I_n \}_{n=1}^{\infty}$ spočetná soustava otevřených /omezených/ intervalů takových, že $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, nazveme soustavu $\{ I_n \}_{n=1}^{\infty}$ Lebesgueovým pokrytím množiny E. Pro libovolnou množinu $E \subset E_n$ definujeme její vnější Lebesgueovu míru $\mu^* E$ předpisem

$$\mu^* E = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_n) ,$$

kde infimum se bere přes všechna možná Lebesgueova pokrytí množiny E /viz pro srovnání 5,5 /.

Dokažte, že

1/ $I \subset E_n$ interval $\Rightarrow$ $\mu^* I = \mathrm{vol}\,(I)$,

2/ μ^* je metrická vnější míra na podmnožinách E_n /definice 7,12 a 7,14/.

Odtud podle 7,15 můžeme definovat systém $\mathfrak{M}_n(\mu^*)$ všech μ^*- měřitelných množin v E_n . Množiny ze systému $\mathfrak{M}_n(\mu^*)$ budeme též nazývat lebesgueovsky měřitelnými množinami v E_n /jak později ukážeme - viz př. 7,39 - splývá systém $\mathfrak{M}_n(\mu^*)$ se systémem $\mathfrak{M}_n$ všech měřitelných množin podle Daniella - pochopitelně vyjdeme-li ze systému $Z = C_n$ a $Af = (R) \int_{E_n} f$) . Podle 7,16 můžeme na systému $\mathfrak{M}_n(\mu^*)$ definovat míru μ_n - říkejme jí n - rozměrná Lebesgueova míra.

7,19.* /cvičení v eukleidovských prostorech/.

Dokažte, že

1/ každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná

[viz 7,6 , 7,16 , 7,18 ,]

2/ $E \subset E_n \Rightarrow \mu^* E = \inf \{ \mu G ;\ G$ otevřená , $E \subset G \}$ (viz též např. věta 55 či skripta I. Černý - J.Mařík, Integrální počet I , věta 4,5),

3/ $E \subset E_n \Rightarrow \mu^* E = \inf \{ \mu M ;\ M \in \mathfrak{M}_n(\mu^*) , E \subset M \}$ /tzv. regularita vnější míry /.

7,20. /cvičení v eukleidovských prostorech/.

Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

a/ $E \in \mathfrak{M}_n(\mu^*)$, tj. E je lebesgueovsky měřitelná ,

b/ ke každému $\varepsilon > 0$ existuje taková otevřená množina G , že $E \subset G$ a $\mu^*(G - E) < \varepsilon$,

c/ ke každému $\varepsilon > 0$ existuje taková uzavřená množina F , že $F \subset E$ a $\mu^*(E - F) < \varepsilon$,

d/ existuje množina G_0 typu G_δ a nulová množina N /tj. množina, pro níž $\mu^* N = 0$ / tak, že $E = G_0 - N$,

e/ existuje množina F_0 typu F_σ a nulová množina M tak, že $E = F_0 \cup M$

/říkáme, že množina G je typu G_δ , resp. F_σ , existují-li otevřené, resp. uzavřené množiny G_n tak, že $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$; resp. $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ /.

Tato věta velmi dobře charakterisuje strukturu lebesgueovsky měřitelných množin v E_n .

Vraťme se však opět k abstraktní teorii míry.

7,21. /obecně/. <u>Definice prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$</u>.

Trojici $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nazveme prostorem s mírou, jestliže

1/ X je neprázdná množina ,

2/ $\mathcal{S}$ je σ - algebra podmnožin množiny X /tj. $\mathcal{S}$ je σ -okruh a $X \in \mathcal{S}$ / ,

3/ μ je úplná míra na $\mathcal{S}$.

<u>Upozornění</u>: většina autorů nazývá prostorem s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ libovolnou trojici uvedených vlastností, pouze požadavek $X \in \mathcal{S}$ je u nich nahrazen požadavkem $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = X$ a požadavek úplnosti míry je vynechán ; my se v dalším podržíme naší definice, mnoho úvah se tím zjednoduší.

7,22. /cvičení/.

1/ Buď μ^* vnější míra na podmnožinách množiny X , nechť míra μ je indukována vnější mírou μ^* na $\mathfrak{M}(\mu^*)$ (viz 7,16). Potom trojice $(X, \mathfrak{M}(\mu^*), \mu)$ je prostor s mírou.

2/ Ukažte, že prostor $(P, \mathfrak{M}, \mu)$ získaný Daniellovou metodou nemusí být prostorem s mírou /viz např. 2,5 /. Bude jím však v případě, když $P \in \mathfrak{M}$.

7,23. /obecně/. <u>Definice $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí</u>.

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou.

Funkce f na množině X /tj. zobrazení X do E_1^*/ se nazývá $\mathcal{S}$ - měřitelná, právě když je splněna jedna z následujících podmínek:

25535 F14

1/ je-li $G \subset E_1$ otevřená množina, potom $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$ a dále $\{x \in X;\ f(x) = +\infty\} \in \mathcal{S}$, $\{x \in X;\ f(x) = -\infty\} \in \mathcal{S}$,

2/ $\{x \in X;\ f(x) < c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

3/ $\{x \in X;\ f(x) > c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

4/ $\{x \in X;\ f(x) \leq c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

5/ $\{x \in X;\ f(x) \geq c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

6/ $\{x \in X;\ f(x) < c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1$.

Systém všech $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí na množině X značme symbolem $\Lambda(\mathcal{S})$.

/<u>Poznámka</u>: jak bylo vidět, stačilo předpokládat, že X je daná množina a $\mathcal{S}$ je σ-algebra jejích podmnožin, míra μ v definici $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí nikde nevystupovala/.

$\boxed{7{,}24.}$ /cvičení/.

1/ Dokažte ekvivalenci jednotlivých výroků v 7,23 ; lze podmínku $c \in E_1^*$ nahradit všude podmínkou $c \in E_1$?

2/ Dokažte následující tvrzení:

je-li X metrický prostor a jestliže každá otevřená podmnožina X leží v $\mathcal{S}$ /speciálně je-li míra indukována metrickou vnější mírou - viz 7,16 a 7,22/, potom každá spojitá funkce na X je $\mathcal{S}$ - měřitelná.

3/ Jak lze zjednodušit definici $\mathcal{S}$ - měřitelné funkce, je-li f skoro všude na X konečná ? /tj. množina těch bodů, kde f nabývá hodnoty $+\infty$ či $-\infty$, je nulová/.

4/ Dokažte, že platí:

a/ $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $g \sim f$ /tj. množina $\{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}$ je nulová/ $\Rightarrow$ $g \in \Lambda(\mathcal{S})$,

b/ jsou-li f, g $\mathcal{S}$ - měřitelné na X, $\alpha, \beta \in E_1$, skoro všude má smysl součet $\alpha f + \beta g$, /chápeme $0 . \pm\infty = \pm\infty . 0 = 0$ /, potom funkce $\alpha f + \beta g$, $f . g$ jsou $\mathcal{S}$ - měřitelné,

c/ $f_n \in \Lambda(\mathcal{S})$, existuje $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} f_n \in \Lambda(\mathcal{S})$,

d/ $f \in \Lambda(\mathcal{S}) \Rightarrow |f|,\ f^+,\ f^- \in \Lambda(\mathcal{S})$, e/ $f \in \Lambda(\mathcal{S}) \Rightarrow \{ x \in X ;\ f(x) = 0 \} \in \mathcal{S}$,

f/ $f, g \in \Lambda(\mathcal{S}) \Rightarrow \{ x \in X ;\ f(x) \neq g(x) \} \in \mathcal{S}$,

g/ $E \in \mathcal{S} \iff c_E \in \Lambda(\mathcal{S})$ /c_E je charakteristická funkce množiny E / .

7,25. /obecně/. <u>Definice nosiče funkce $N(f)$</u>

Buď f funkce na množině X . Potom množinu

$$N(f) = \{ x \in X ;\ f(x) \neq 0 \}$$

nazveme <u>nosičem</u> funkce f /v X / .

<u>Upozornění:</u> tato definice není zcela ve shodě s definicí za větou 46, kde jsme nosič definovali jako uzávěr množiny $N(f)$; v této kapitole však používejme stále shora uvedenou definici.

<u>Poznámka</u> /pro pochopení dalšího není nutné číst/.

V odstavci 7,23 jsme definovali $\mathcal{S}$ - měřitelné funkce v případě, že $\mathcal{S}$ je σ - algebra podmnožin množiny X , tj. v případě, že $X \in \mathcal{S}$. Pojem $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí lze definovat i tehdy, není-li $X \in \mathcal{S}$.

Definujeme /X je množina, $\mathcal{S}$ σ - okruh jejích podmnožin, f funkce na X /:

funkce f je $\mathcal{S}$ - měřitelná, je-li splněna jedna z následujících ekvivalentních podmínek:

1/ $f^{-1}(G) \cap N(f) \in \mathcal{S}$ pro každou otevřenou množinu

$$G \subset E_1 ,\ \{ x \in X ;\ f(x) = +\infty \} \in \mathcal{S} ,$$

$$\{ x \in X ;\ f(x) = -\infty \} \in \mathcal{S} ,$$

2/ $N(f) \cap \{ x \in X ;\ f(x) \leq c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

3/ $N(f) \cap \{ x \in X ;\ f(x) \geq c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

4/ $N(f) \cap \{ x \in X ;\ f(x) < c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$

a $\{ x \in X ;\ f(x) = +\infty \} \in \mathcal{S}$,

5/ $N(f) \cap \{ x \in X ;\ f(x) > c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

$\{ x \in X ;\ f(x) = -\infty \} \in \mathcal{S}$.

Opět symbolem $\Lambda(\mathcal{S})$ můžeme označit systém všech $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí na X .

Ukažte, že v případě $X \in \mathcal{S}$ je tato definice ve shodě s definicí v 7,23. Která z tvrzení ve cvičení 7,24 zůstávají v platnosti i nyní ?

7,26. /cvičení/.

Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou. Potom

$$f \in \Lambda(\mathcal{S}) \implies N(f) \in \mathcal{S}$$, dokažte !

[Viz 7,24 e, f .]

7,27. /obecně/ Definice jednoduché funkce.

Konečná funkc f definovaná na množině X ($(X, \mathcal{S}, \mu)$ je stále prostor s mírou) se nazývá jednoduchá, je-li množina $f(X)$ konečná /tj. f nabývá pouze konečně mnoha hodnot/ a $\{ x \in X ; f(x) = c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1$.

7,28. /cvičení/.

Dokažte, že platí

1/ f jednoduchá na $X \implies f \in \Lambda(\mathcal{S})$,

2/ f, g jednoduché funkce, $\alpha, \beta \in E_1 \implies \alpha f + \beta g$ je jednoduchá, $f.g$ je jednoduchá funkce.

7,29. /obecně/. Definice σ - konečné míry.

Nechť μ je míra na σ - okruhu $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X . Řekneme, že míra μ je σ - konečná, právě když existují množiny $E_n \in \mathcal{S}$ tak, že

$$\mu E_n < +\infty \quad , \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \ .$$

Lze snadno nahlédnout, že ze σ - konečnosti míry μ plyne $X \in \mathcal{S}$, tj. $\mathcal{S}$ je pak nutně σ - algebra.

Upozornění: u mnoha autorů je tato definice trochu jiná.

7,30.* /obecně - důležité/.

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Buď $f \in \Lambda(\mathcal{S})$ /viz 7,23/. Potom existuje posloupnost jednoduchých funkcí f_n na X takových, že $f_n \longrightarrow f$. Je-li navíc $f \geq 0$, lze volit posloupnost f_n tak, že $f_n \geq 0$ na X , $f_n \leq f_{n+1}$ pro každé n . Je-li míra μ σ - konečná, můžeme volit posloupnost f_n tak, že $\mu(N(f_n)) < +\infty$ /viz definice 7,29 a 7,25 /.

Viz též skripta I. Černý - J. Mařík , Integrální počet I , odstavec 4,12.

7,31. /obecně/. Lemma.

Dokažte následující.

1/ Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou, buď $E \in \mathcal{S}$.
Symbolem $\mathcal{S}_E$ označme systém všech množin $A \in \mathcal{S}$ takových, že $A \subset E$, tj.

$$\mathcal{S}_E = \{ A ;\ A \in \mathcal{S} ,\ A \subset E \} .$$

Potom trojice $(E, \mathcal{S}_E, \mu)$ je prostor s mírou.

2/ Buď $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $E \in \mathcal{S}$, definujme funkci $\hat{f}$ takto:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in E , \\ 0 & \text{pro } x \in X - E . \end{cases}$$

Potom $\hat{f} \in \Lambda(\mathcal{S})$ /viz též větu 12/.

3/ Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou, $E \in \mathcal{S}$. Vytvořme prostor $(E, \mathcal{S}_E, \mu)$ podle části 1. Systém všech $\mathcal{S}_E$ - měřitelných funkcí na E značme symbolem $\Lambda(\mathcal{S}_E)$.
Dokažte následující:

a/ $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $f_1 = f/E$ (tj. f_1 je funkce definovaná na E a rovna f na E)
$\Longrightarrow$ $f_1 \in \Lambda(\mathcal{S}_E)$,

b/ $f_1 \in \Lambda(\mathcal{S}_E)$, $f = f_1$ na E , $f = 0$ na $X - E$
$\Longrightarrow$ $f \in \Lambda(\mathcal{S})$.

Nyní máme již vše připraveno, abychom mohli definovat abstraktní integrál. Je mnoho způsobů, jak jej vhodně zavést, my zde ze začátku naznačíme klasickou definici, velmi podobnou definici Riemannova integrálu.

7,32. /obecně/. <u>Zavedení abstraktního integrálu.</u>

Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ pevně daný prostor s mírou /definice 7,21/.

A/ Ze začátku předpokládejme, že <u>$\mu X < +\infty$</u> a že f je libovolná $\mathcal{S}$ - měřitelná a <u>omezená</u> funkce na X .

Nechť $m < \inf_{x \in X} f(x)$, $M > \sup_{x \in X} f(x)$.

Vezměme libovolné dělení D intervalu $\langle m, M \rangle$, nechť

$$D : y_0 = m < y_1 < y_2 < \dots < y_n = M .$$

Označme

$$E_i = \{ x \in X ;\ y_{i-1} \leq f(x) < y_i \} , \quad i = 1, \dots , n .$$

Ukažte, že

1/ $E_i \in \mathcal{S}$ pro každé i ,

2/ $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X$,

3/ množiny E_i jsou po dvou disjunktní

/[illegible]slete si obrázek !/ .

Nyní utvoříme tzv. <u>horní a dolní Lebesgueův součet</u> funkce f příslušný dělení D - definujeme

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu E_i ,$$

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot \mu E_i$$

/porovnejte s klasickou definicí Riemannovou !! /.

Lze ukázat /rozdíl od Riemannova integrálu !/, že

$$\sup_D s(f,D) = \inf_D S(f,D) ,$$

kde supremum a infimum se bere přes všechna možná dělení D intervalu $\langle m,M \rangle$.

Definujeme tedy abstraktní integrál vztahem

$$\int_X f \, d\mu = \sup_D s(f,D) = \inf_D S(f,D) ,$$

/lze ukázat, že definice nezávisí na volbě hodnot m,M !/.

B/ Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $E \in \mathcal{S}$ taková množina, že $\mu E < +\infty$. Buď f libovolná $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X , která je na množině E omezená. Označme $\hat{f} = f/E$ /viz 7,31/. Potom definujeme

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \hat{f} \, d\mu ,$$

kde integrál vpravo je již definován podle části A .

C/ Buď nyní $(X, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, f libovolná <u>nezáporná</u> $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X .

Posloupnost funkcí $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ na X nazveme aproximující posloupností pro funkci f , právě když

1/ $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ pro každé n ,

2/ f_n jsou omezené na X ,

3/ f_n jsou $\mathcal{S}$ - měřitelné na X ,

4/ každá množina $N(f_n)$ /viz 7,25 a 7,26/ má konečnou míru ,

5/ $f_n \nearrow f$ skoro všude .

Ukažte, že platí následující tvrzení:

"Buď f nezáporná $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X , buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě aproximující posloupnosti pro funkci f , potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_{N(f_n)} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{N(g_n)} g_n \, d\mu \quad ."$$

Buď tedy f libovolná nezáporná $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X . Funkci f nazveme integrovatelnou, existuje-li aproximující posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro funkci f .

V tomto případě definujeme

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{N(f_n)} f_n \, d\mu$$

/poslední limita může být i nevlastní !/.

Podle předchozí věty nezávisí $\int_X f \, d\mu$ na výběru aproximující posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ukažte, že v případě σ - konečné míry /definice 7,29/ vždy existuje aproximující posloupnost pro funkci f , tedy v tomto případě je libovolná $\mathcal{S}$ - měřitelná a nezáporná funkce na X integrovatelná /viz lemma 7,30/.

D/ Pro libovolnou $\mathcal{S}$ - měřitelnou funkci f na X definujeme abstraktní integrál vztahem

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \quad ,$$

má-li rozdíl vpravo smysl.

Systém všech $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí na X s konečným abstraktním integrálem označme symbolem $\mathcal{L}(\mu)$. Nyní bychom mohli definovat obvyklým způsobem integrál přes měřitelné podmnožiny X a odvodit všechny známé vlastnosti integrálu /tj. věty 18 - 46 první kapitoly /.

$\boxed{7,33.}$ /eukleidovské prostory/.

Celou abstraktní teorii můžeme nyní aplikovat na speciální případ eukleidovských prostorů. Vyjdeme ze systému $\mathfrak{M}_n(\mu^*)$ všech lebesgueovsky měřitelných množin v E_n a z n-rozměrné Lebesgueovy míry μ_n /viz definici 7,18/. Lehko se ukáže, že $(E_n, \mathfrak{M}_n(\mu^*), \mu_n)$ je prostor s mírou a míra μ_n je na E_n σ - konečná. Systém všech $\mathfrak{M}_n(\mu^*)$ - měřitelných funkcí na E_n definujeme jako v 7,23 a označíme jej symbolem $\Lambda_n(\mu)$.

Pro libovolnou omezenou lebesgueovsky měřitelnou množinu $A \subset E_n$ a libovolnou lebesgueovsky měřitelnou a omezenou funkci f na A definujeme integrál $\int_A f\, d\mu$ jako v 7,32 A - B /znovu si zopakujte! /.

Je-li nyní f libovolná lebesgueovsky měřitelná a nezáporná funkce v E_n - anebo přímo v libovolné měřitelné množině $M \subset E_n$ - můžeme definovat aproximující posloupnost pro funkci f

1/ buďto jako v 7,30 /f_n jsou jednoduché funkce/,

2/ anebo takto:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M \cap [\langle -n,+n\rangle \times \dots \times \langle -n,+n\rangle] \\ & \text{je-li } f(x) \leq n, \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in M. \end{cases}$$

/Lehko nahlédnete, že f_n tvoří aproximující posloupnost pro f na M/. Lebesgueův integrál $\int_M f\, d\mu$ definujeme nyní jako v 7,32 C . Integrál z libovolné lebesgueovsky měřitelné funkce pak definujeme jako v 7,32 D .

$\boxed{7,34.}$ /obecně/.

Potřebujeme nyní porovnat teorii integrálu, kterou jsme naznačili v 7,32 s postupem rozšíření základního prostoru (Z,A) /Daniellova metoda/. Ještě jednou zopakujme rozdíl obou metod - v této kapitole jsme vyšli z abstraktního prostoru s mírou (X, φ, μ), vybudovali jsme teorii φ - měřitelných funkcí a potom jsme teprve definovali integrál a zavedli systém $\mathcal{L}(\mu)$ všech funkcí s konečným integrálem. Daniellova metoda naopak vychází ze základního prostoru (Z,A), definuje se integrál a systém $\mathcal{L}$ všech funkcí s konečným integrálem a teprve potom se buduje teorie měřitelných funkcí, měřitelných množin a míry.

Naskýtá se nyní následující otázka. Vyjdeme ze základního prostoru (Z,A) , provedeme Daniellovo rozšíření a dostaneme trojici $(P, \mathfrak{M}, \mu)$. Dejme tomu, že $P \in \mathfrak{M}$ - potom můžeme vyjít z prostoru s mírou $(P, \mathfrak{M}, \mu)$ /viz 7,22/, vybudovat systém všech $\mathfrak{M}$ - měřitelných funkcí, můžeme definovat "nový" integrál $\int_P f\, d\mu$ podle 7,32. Jaký bude nyní vztah původního systému měřitelných funkcí Λ a systému

$\Lambda(\mathfrak{M})$ všech $\mathfrak{M}$ - měřitelných funkcí ? A jaký bude vztah původního integrálu Af a "nového" integrálu $\int_P f \, d\mu$? Odpověď na tyto otázky dává následující věta.

$\boxed{7{,}35.^{**}}$ /obecně/. Věta.

Předpokládejme, že prostor s mírou $(P, \mathfrak{M}, \mu)$ jsme získali rozšířením základního prostoru (Z,A) Daniellovou metodou. a že $P \in \mathfrak{M}$.
Potom

1/ $\Lambda = \Lambda(\mathfrak{M})$ /tj. systém všech měřitelných funkcí Λ splývá se systémem $\mathfrak{M}$ - měřitelných funkcí, tj. platí následující

$$f \in \Lambda \Leftrightarrow \{x \in P ;\ f(x) < c\} \in \mathfrak{M} \text{ pro každé } c \in E_1 \text{ /,}$$

2/ $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu)$,

3/ $f \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu) \Rightarrow Af = \int_P f \, d\mu$.

Je tedy vidět, že obě metody /jedna metoda - nejdříve integrál, pak míra, druhá metoda - nejdříve míra, pak integrál/ dávají totéž. Přesněji, vybudujeme-li teorii integrálu a míry Daniellovou metodou rozšířením základního prostoru (Z,A) / a $P \in \mathfrak{M}$ /, potom existuje takový σ - okruh podmnožin množiny P /a sice $\mathfrak{M}$ / a taková míra / μ / , že systém měřitelných či integrovatelných funkcí jsme mohli také obdržet metodami této kapitoly z prostoru s mírou $(P, \mathfrak{M}, \mu)$.

$\boxed{7{,}36.}$ /obecně/.

Je možno si také položit obrácenou otázku. Dejme tomu, že máme dán prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$, značme jej raději $(X, \mathcal{S}, \mu_{\mathcal{S}})$ /znovu podotkněme, že podle naší definice je $X \in \mathcal{S}$ a míra $\mu_{\mathcal{S}}$ je úplná !/ ; můžeme vybudovat systém $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí $\Lambda(\mathcal{S})$, systém funkcí s konečným integrálem $\mathcal{L}(\mu_{\mathcal{S}})$ a konečně integrál $\int_X f \, d\mu_{\mathcal{S}}$ pro funkce z $\mathcal{L}(\mu_{\mathcal{S}})$. Ptáme se nyní, zda existuje takový základní prostor (Z,A) , že $\Lambda = \Lambda(\mathcal{S})$, $\mathfrak{M} = \mathcal{S}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_{\mathcal{S}})$, kde systémy Λ , $\mathfrak{M}$, $\mathcal{L}$ jsou odvozeny ze základního prostoru (Z,A) Daniellovým rozšířením.

Částečnou odpověď dá následující věta, pokuste se ji dokázat.

$\boxed{7{,}37.^{*}}$ /obecně/. Věta.

Buď $(X, \mathcal{S}, \mu_{\mathcal{S}})$ prostor s mírou /viz 7,21/ , nechť míra $\mu_{\mathcal{S}}$ je σ - konečná na X /viz 7,29/. Symbolem Z označme systém všech jednoduchých funkcí /viz 7,27/, pro které $\mu\left[N(f)\right] < +\infty$ / viz 7,25 a 7,26/.

Ukažte, že

1/ systém Z tvoří základní systém funkcí, tj. Z splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$ /ukažte, že je navíc splněn Stoneův axiom, viz 8,11/.
Pro libovolnou funkci $f \in Z$, $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot c_{E_i}$ /tj. funkce f nabývá na množinách $E_i \in \mathcal{S}$ hodnot y_i / definujeme

$$Af = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu(E_i) .$$

Ukažte, že

2/ číslo Af nezávisí na volbě tvaru funkce f, tj. je-li též $f = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot c_{F_i}$, je $\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu E_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \mu F_i$ /viz také 7,40 A/,

3/ funkcionál A splňuje na Z axiomy $4_A - 7_A$.

Tedy (Z,A) tvoří základní prostor, můžeme provést Daniellovo rozšíření - obdržíme systémy $\mathcal{L}$, Λ, $\mathcal{M}$ a míru μ na $\mathcal{M}$, značme ji raději symbolem $\mu_{\mathcal{M}}$.

Ukažte dále, že platí.

4/** $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_{\mathcal{S}})$,

5/** $f \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_{\mathcal{S}}) \Longrightarrow Af = \int_X f \, d\mu_{\mathcal{S}}$,

6/** $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ a $\mu_{\mathcal{S}} A = \mu_{\mathcal{M}} A$ pro $A \in \mathcal{M} = \mathcal{S}$.

7,38.** /obecně/. Věta.

Z předchozího dokažte následující větu.

Buď (Z,A) základní prostor, proveďme Daniellovo rozšíření, dostaneme trojici $(P, \mathcal{M}, \mu)$. Předpokládejme, že $P \in \mathcal{M}$. Označme symbolem $\overline{Z}$ systém všech jednoduchých funkcí na P s $\mu N(f) < +\infty$. Pro funkce ze systému $\overline{Z}$ definujme integrál $\overline{A}$ stejně jako v 7,37. Rozšíříme-li takto získaný základní prostor $(\overline{Z}, \overline{A})$, dostaneme systémy $\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\Lambda}$, míru $\overline{\mu}$ a integrál $\overline{A}$.

Potom

1/ $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ a $Af = \overline{A}f$ pro $f \in \mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$,

2/ $\Lambda = \overline{\Lambda}$,

3/ $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ a $\mu M = \overline{\mu} M$ pro $M \in \mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$.

Tedy - vyjdeme-li z jednoduchých funkcí a utvoříme Daniellovo rozšíření, dostaneme přesně totéž. Viz též 8,42.

$\boxed{7,39.^{**}}$ /eukleidovské prostory/.

Vraťme se nyní k Lebesgueovu integrálu v E_n. Ten můžeme vybudovat různými způsoby, uvedli jsme si dvě podstatně různé metody - Daniellovo rozšíření základního prostoru $Z = C_n$, $A_f = (R)\int_{E_n} f$ a klasickou metodu z teorie míry /7,32, 7,33/. Opět označme symboly $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mu_{\mathcal{M}}$ systémy a míru získané Daniellovým rozšířením. Symbolem $\mathcal{S}_n$ označme systém všech lebesgueovsky měřitelných množin v E_n /viz 7,15, 7,18/, symbolem μ_n n - rozměrnou Lebesgueovu míru na $\mathcal{S}_n$ /7,18/, nechť $\Lambda(\mathcal{S}_n)$ značí systém všech lebesgueovsky měřitelných funkcí v E_n /7,23/ a konečně $\mathcal{L}(\mu_n)$ a $\int_{E_n} f \, d\mu_n$ systém všech funkcí s konečným integrálem a Lebesgueův integrál v E_n /7,32, 7,33/.

Potom

1/ $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_n)$ a $Af = \int_{E_n} f \, d\mu_n$ pro $f \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_n)$,

2/ $\mathcal{S}_n = \mathcal{M}_n$, $\mu_{\mathcal{S}_n} = \mu_{\mathcal{M}}$,

3/ $\Lambda = \Lambda(\mathcal{S}_n)$.

V dalším ještě ukážeme některé další /v podstatě ekvivalentní definice integrálu .

$\boxed{7,40.}$ /obecně/.

Předpokládejme, že je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

A/ Nejdříve definujeme <u>integrál z jednoduchých funkcí</u> /viz 7,27/; Je-li f jednoduchá, f tvaru $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot c_{E_i}$, definujeme

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu E_i ,$$

má-li součet vpravo smysl /chápeme $0 . \pm\infty = \pm\infty . 0 = 0$ / .

Je nutno ukázat, že

a/ definice $\int_X f \, d\mu$ nezávisí na volbě tvaru funkce f /viz též 7,37 - 2/,

b/ jsou-li f_n jednoduché funkce, $f_n \nearrow f$, f jednoduchá funkce, potom $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f \, d\mu$,

c/ jestliže f_n, g_n jsou dvě posloupnosti jednoduchých funkcí, $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow f$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu .$$

B/ Nyní definujeme integrál z libovolné <u>nezáporné $\mathcal{S}$ - měřitelné funkce.</u>

Je-li $f \geq 0$, $f \in \Lambda$ ($\mathcal{S}$) , existuje podle 7,30 posloupnost jednoduchých funkcí f_n tak, že $f_n \nearrow f$ - definujeme

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \; .$$

Je nutno ukázat, že

a/ číslo $\int_X f \, d\mu$ nezávisí na volbě posloupnosti f_n ,

b/ nová definice $\int_X f \, d\mu$ není v rozporu s definicí $\int_X \cdot \, d\mu$ pro jednoduché funkce .

C/ Pro libovolnou $\mathcal{S}$ - měřitelnou funkci definujeme integrál jako v 7,32 D .

7,41. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $\mu X < +\infty$.
"Dělením množiny X " nazveme libovolnou konečnou soustavu $\{E_n\}_{n=1}^{N}$ podmnožin množiny X takovou, že

1/ $E_i \in \mathcal{S}$ pro i - 1,...,N ,

2/ množiny E_i jsou po dvou disjunktní ,

3/ $\bigcup_{i=1}^{N} E_i = X$.

Pro libovolné "dělení" $D = \{E_n\}_{n=1}^{N}$ množiny X a pro libovolnou omezenou funkci f na X utvořme veličiny

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{N} \sup_{x \in E_i} f(x) \, . \, \mu(E_i)$$

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{N} \inf_{x \in E_i} f(x) \, . \, \mu(E_i)$$

/S(f,D) a s(f,D) jsou tedy "horní" a "dolní" součty/.

Ukažte, že

1/ $f \in \Lambda$ ($\mathcal{S}$) $\Longrightarrow$ $\inf_D S(f,D) = \sup_D s(f,D)$

/infimum a supremum se bere přes všechna dělení D množiny X ,

2/ $\inf_D S(f,D) = \sup_D s(f,D)$ $\Longrightarrow$ $f \in \Lambda(\mathcal{S})$.

Pro libovolneu $\mathcal{S}$ - měřitelnou omezenou funkci na X /pro $\mu X < +\infty$!/ se nám tedy opět podařilo definovat integrál vztahem

$$\int_X f \, d\mu = \inf_D S(f,D) = \sup_D s(f,D) \; .$$

Rozšíření definice na případ obecné množiny $X \in \mathcal{S}$ a libovolné $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na X je pak stejné jako v cvičení 7,32 .

$\boxed{7{,}42.^{*}}$ Buď dán opět prostor s mírou (X, φ, μ) , $\mu X < +\infty$, nechť $f \in \Lambda(\varphi)$. Definujme integrál $\int_X f \, d\mu$ například jako v cvičení 7,32.

Pro libovolné celé n a libovolné $\varepsilon > 0$ položme

$$A_n^{\varepsilon} = \{ x \in X ; \ n\varepsilon \leq f(x) < (n+1)\varepsilon \} ,$$

$$S(f, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n . \varepsilon . \mu(A_n^{\varepsilon}) .$$

Potom platí

1/ $f \in \mathcal{L}(\mu) \Rightarrow$ řada $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n . \varepsilon . \mu(A_n^{\varepsilon})$

konverguje absolutně pro každé $\varepsilon > 0$ a

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0_+} S(f, \varepsilon)$$

/viz též př. 8,61/,

2/ řada $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \, \varepsilon . \mu(A_n^{\varepsilon})$ konverguje absolutně pro každé $\varepsilon > 0 \Rightarrow f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Odtud je též vidět, jak by bylo možno definovat integrál. Proveďte !

$\boxed{7{,}43.}$ Uveďme ještě jednu poučnou definici Lebesgueova integrálu v E_1 . Zopakujte si proto definici <u>jednoduchých funkcí</u> v intervalu $\langle a,b \rangle$ /viz 7,27, kde položíte $X = \langle a,b \rangle$, φ = systém všech lebesgueovsky měřitelných množin v $\langle a,b \rangle$, μ = Lebesgueova míra/. Funkce φ se nazývá <u>elementární jednoduchá funkce</u> v intervalu $\langle a,b \rangle$, jestliže existuje dělení D intervalu $\langle a,b \rangle$,

$$D : y_0 = a < y_1 < \dots < y_n = b$$

a reálná čísla $c_1 , \dots , c_n$ tak, že

$$\varphi(x) = c_i \quad \text{pro} \quad x \in \langle y_{i-1} , y_i) \ , \quad i = 1, \dots, n .$$

Ukažte, že

1/ každá elementární jednoduchá funkce je jednoduchá funkce, ale ne naopak /např. Dirichletova funkce - viz př. 2,31 - je jednoduchá funkce v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, ale není elementární jednoduchá funkce v $\langle 0,1 \rangle$ / .

Je-li f jednoduchá funkce v intervalu $\langle a,b \rangle$ /ať již elementární či ne/, definujeme $\int_a^b f$ stejně jako ve cvičení 7,40 A /čemu je pak roven integrál $\int_a^b f$ pro elementární jednoduché funkce ? /.

Buď nyní f libovolná omezená lebesgueovsky měřitelná funkce v intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$. Označme symbolem J , resp. E systém všech jednoduchých, resp. elementárních jednoduchých funkcí na intervalu $\langle a,b \rangle$.

Definujme následující veličiny:

$$(R)\overline{\int_a^b} f = \inf_{\substack{g \in E \\ g \geq f}} \int_a^b g \ , \qquad (R)\underline{\int_a^b} f = \sup_{\substack{h \in E \\ h \leq f}} \int_a^b h \ ,$$

$$(L)\overline{\int_a^b} f = \inf_{\substack{g \in J \\ g \geq f}} \int_a^b g \ , \qquad (L)\underline{\int_a^b} f = \sup_{\substack{h \in J \\ h \leq f}} \int_a^b h \ .$$

Ukažte, že

2/ $(R)\overline{\int_a^b} f$, $(R)\underline{\int_a^b} f$ jest horní a dolní Riemannův integrál funkce f ,

3/ $(R)\underline{\int_a^b} f \leq (L)\underline{\int_a^b} f = (L)\overline{\int_a^b} f \leq (R)\overline{\int_a^b} f$;

Společnou hodnotu $(L)\underline{\int_a^b} f$ a $(L)\overline{\int_a^b} f$ pak prohlásíme za Lebesgueův integrál funkce f přes interval $\langle a,b \rangle$.

Odtud již lehko ukážete, že

4/ existuje-li $(R)\int_a^b f$, jest $(R)\int_a^b f = (L)\int_a^b f$.

Jak by se nyní rozšířila definice $(L)\int_a^b f$ na neomezené intervaly či na neomezené funkce ?

7,44.** A/ Označme symbolem K systém všech nezáporných a nerostoucích funkcí /zobrazení do E_1^* !/ na intervalu $(0,+\infty)$. Lze ukázat, že existuje právě jeden funkcionál I na systému K /připouštíme, že If může být i $+\infty$ pro $f \in K$ / takový, že jsou splněny následující axiomy:

1/ $f_n \in K$, $f_n \nearrow f$ /zřejmě je $f \in K$ / $\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} If_n = If$,

2/ $f,g \in K$ /zřejmě je $f + g \in K$ / $\Longrightarrow I(f + g) = If + Ig$,

3/ $I\,c_z = z$ pro libovolné $z > 0$, přičemž c_z znamená charakteristickou funkci intervalu $(0,z\rangle$.

B/ Buď nyní $(X, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, buď f nezáporná $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X , buď $x > 0$.

Označme $E_f^x = \{ y \in X ; f(y) > x \}$, tedy $E_f^x \in \mathcal{S}$. Každé funkci $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $f \geq 0$ přiřaďme reálnou funkci h_f definovanou na intervalu $(0,+\infty)$ předpisem $h_f(x) = \mu(E_f^x)$. Zřejmě $h_f \in K$ /viz odstavec A/. Existuje tedy Ih_f a položme $\int_X f \, d\mu = Ih_f$.
Pro libovolnou funkci $f \in \Lambda(\mathcal{S})$ položme pak

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$, má-li rozdíl vpravo smysl.

Máme-li nyní odvozeny základní vlastnosti funkcionálu I na systému K , vyplynou nám všechny vlastnosti $\int_X f \, d\mu$ zcela automaticky z příslušných vlastností funkcionálu I .

7,45. **Poznámky**

1/ O dalších způsobech zavedení Lebesgueova integrálu se lze dočíst např. v knihách

V.Jarník, Integrální počet II ,

I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I /skripta/.

2/ V celé této kapitole jsme předpokládali, že $X \in \mathcal{S}$. Lebesgueův abstraktní integrál lze definovat a zavést i bez tohoto omezujícího předpokladu, nebudeme se tím však zabývat.