6. Integrály závislé na parametru

6,1. Mějme dánu funkci dvou proměnných $f(x, \alpha)$ na množině $M \times A$, kde M je měřitelná množina v E_1, A prozatím libovolná množina. Předpokládejme, že pro každou hodnotu $\alpha \in A$ existuje $\int_M f(x, \alpha)\, dx$. Obecně pro různé hodnoty $\alpha \in A$ může tento integrál nabývat různých hodnot, vidíme tedy, že $\int_M f(x, \alpha)\, dx$ je funkcí proměnné α na množině A. Označme $F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\, dx$ pro $\alpha \in A$ (viz též 4,14). Zajímají nás nyní vlastnosti funkce F - její limity, spojitost, monotonie, derivace, atd. Jde o řadu otázek, kdy určité vlastnosti funkce f (chápané jako funkce α) implikují tytéž vlastnosti funkce F. V dalším budeme potřebovat hlavně větu 60 (o spojité závislosti integrálu na parametru) a větu 61 (o derivaci integrálu podle parametru) - zopakujte si je.
[Poznámka - funkci g z věty 60 říkáme konvergentní majoranta k funkci $f(x, \alpha)$ na množině M pro $\alpha \in A$, rovněž tak funkci G z věty 61 říkáme konvergentní majoranta k funkci $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ na množině M pro $\alpha \in I$.]

Všimněte si nyní analogických vět k větám 60, 61, které platí pro řady funkcí:

věta A: "Buďte funkce f_n definovány na množině M, buď

$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na M, nechť

2/ f_n jsou spojité na M,

3/ řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M.

Potom je f spojitá na M".

věta B: "Funkce f_n buďte definovány na intervalu $I \subset E_1$, nechť

2/ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje alespoň v jednom bodě intervalu I,

3/ a/ pro každé $n \in N$ a každé $x \in I$ existuje vlastní $f_n'(x)$,

b/ řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na I.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na celém intervalu I. Označíme-li $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, má funkce f všude na intervalu I vlastní derivaci, přičemž $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na I".

Vidíme, že věty A a B jsou zcela analogické větám 60 a 61, pouze roli existence konvergentních majorant zde hraje stejnoměrná konvergence. Zdá se, že věty 60 a 61 mají tedy "silnější" předpoklady než analogické věty A,B - víme totiž, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M podle Weierstrassova kriteria například tehdy, existuje-li k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině M konvergentní majorantní řada s konstantními členy - může se ovšem stát, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M i tehdy, když žádná taková konvergentní majorantní řada neexistuje (uveďte příklad!). Uvědomte si však, že řady nemusí být na druhé straně absolutně konvergentní, zatímco Lebesgueův integrál je "absolutně konvergentní" (věta 44).

6,2. **Poznámka**

Při hledání konvergentní majoranty g z věty 60 bývá výhodné položit $g(x) = \sup_{\alpha \in A} |f(x, \alpha)|$. Je-li nyní $g \in \mathcal{L}_M$ a jsou-li splněny ostatní předpoklady, můžeme větu 60 použít. Velmi často se stává, že takto získaná funkce g (což je vlastně "nejlepší" majoranta) neleží v systému $\mathcal{L}_M$. Z toho ovšem ještě neplyne, že by funkce $F(\alpha)$ nebyla na množině A spojitá. Uvědomíme-li si, že (podle definice) funkce F je spojitá na množině A tehdy a jen tehdy, je-li spojitá v každém bodě množiny A, vidíme, že stačí dokázat spojitost funkce F v každém bodě množiny A (ostatně víme, že spojitost funkce F je pouze "lokální" vlastnost, nebude proto asi nutné hledat konvergentní majorantu v celé množině A).

Nechť například množina A je otevřený interval (p,q), chceme dokázat, že funkce F je spojitá v tomto intervalu (p,q). K tomu je nutné a stačí dokázat, jak jsme již poznamenali, že funkce F je spojitá v každém bodě intervalu (p,q). Buď tedy $a_0 \in (p,q)$. Abychom dokázali, že F je spojitá v bodě a_0, stačí (není to však nutné!), dokážeme-li, že funkce F je spojitá v nějakém intervalu $\langle p_0, q_0 \rangle \subset (p,q)$ takovém, že $a_0 \in (p_0,q_0)$. (Odůvodněte!). Při důkazu spojitosti funkce F v intervalu $\langle p_0,q_0 \rangle$ použijeme opět větu 60, ale klademe nyní $g(x) = \sup_{\alpha \in \langle p_0, q_0 \rangle} |f(x, \alpha)|$, tedy supremum se již nebere přes celý původní interval (p,q).

Dokažte si nyní sami následující věty:

1/ funkce F je spojitá v intervalu $(p,q) \Leftrightarrow$ F je spojitá v __každém__ intervalu $\langle p_0,q_0 \rangle \subset (p,q)$,

2/ F je spojitá v $(p,q) \Leftrightarrow$ F je spojitá v __každém__ intervalu $(p,q_0\rangle \subset (p,q)$, 3/ F je spojitá v (p,q) $\Longleftrightarrow$ F je spojitá v <u>každém</u> intervalu $\langle p_0, q) \subset (p,q)$.

Těchto jednoduchých vět tedy budeme v dalších příkladech používat, podrobně si je prostudujte a promyslete!

Tatáž poznámka platí i pro použití věty 61, hledáme-li konvergentní majorantu $\mathcal{G}$, kde opět bývá nejlepší zkusit

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{\alpha \in A} \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| .$$

6,3.	Ukažte, že funkce F, $F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}\, dx$, je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$.

1/ Ukažte nejdříve - jako cvičení - že tento integrál konverguje, právě když $\alpha \in \langle 0, +\infty)$.

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $\langle 0, +\infty)$, použijeme větu 60, kde klademe $M = (0, +\infty)$, $A = \langle 0, +\infty)$. Ověříme předpoklady:

1/ pro každé $\alpha \in \langle 0, +\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$ (jakožto funkce x !) spojitá v $(0, +\infty)$, tedy $\frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$

2/ pro každé $x \in (0, +\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$ (jakožto funkce α !) spojitá v $\langle 0, +\infty)$,

3/ Položíme-li $g(x) = \sup_{\alpha \in \langle 0,+\infty)} \frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$, je $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ na $(0, +\infty)$ a tedy $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Tím jsme ověřili všechny předpoklady věty 60 a podle tvrzení této věty je funkce F spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ ‖

6,4.	Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx$ je spojitá v $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $\alpha \in (0, +\infty)$.

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $(0, +\infty)$, položte ve větě 60 $A = (0, +\infty)$, $M = (0, +\infty)$ a ověřte předpoklady 1/ a 2/. Hledejme konvergentní majorantu, nejvýhodnější je zkusit $g(x) = \sup_{\alpha \in (0,+\infty)} e^{-\alpha x}$, odtud plyne, že $g(x) = 1$ pro každé $x \in (0, +\infty)$ a není tudíž $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (proč?).

Zkusme postupovat podle poznámky 6,2. Stačí, ukážeme-li, že funkce F

je spojitá v každém intervalu $\langle p_0,+\infty)$, kde $p_0 > 0$ (vidíme totiž, že při hledání konvergentní majoranty, "vadí" bod 0). Buď tedy $p_0 > 0$ a aplikujme větu 60, kde klademe $A = \langle p_0,+\infty)$, $M = (0,+\infty)$. Opět sami ověřte předpoklady 1/ a 2/ a hledejte konvergentní majorantu ve tvaru

$$g(x) = \sup_{\alpha \in \langle p_0,+\infty)} e^{-\alpha x}, \quad x \in (0,+\infty).$$

Vidíme, že $g(x) = e^{-p_0 x}$ pro $x \in (0,+\infty)$, tedy $g \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$

Funkce F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p_0,+\infty) \subset (0,+\infty)$, tedy je spojitá v $(0,+\infty)$.

3/ Jako cvičení spočtěte $F(a)$!

Příklad 6,4 ještě jednou podrobně projděte a rozmyslete; až vám bude jasné, proč jsme nemohli použít větu 60 na celý interval $(0,+\infty)$ najednou, přejděte k dalším příkladům.

6,5. Buď $F(a) = \int_{-1}^{+1} \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$. Dokažte, že

1/ integrál existuje, jako Riemannův pro každé $a \in E_1$ (spočtěte jej!),

2/ funkce F je spojitá v E_1.

Ukažte, že F je spojitá v každém intervalu $\langle -p,+p\rangle$, kde $p > 0$; majoranta $g(x) = \sqrt{x^2 + p^2}$ na $(-1,+1)$ pro $a \in \langle -p,p\rangle$.

6,6. Buď $F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. Ukažte, že

1/ integrál existuje jako Riemannův pro každé $a \in E_1$, $a \neq 0$ (spočtěte!),

2/ $F(0) = +\infty$,

3/ F je sudá funkce,

4/ F je spojitá v $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

4/ Ukažte, že F je spojitá v každém intervalu $\langle p,+\infty)$, kde $p > 0$; majoranta $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}}$ na $(0,1)$ pro $a \in \langle p,+\infty)$.

$\boxed{6,7.}$ Dokažte, že:

1/ $F(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$ [viz př. 5,84],

2/ $F(a) = \int_0^{2} x^2 \cdot \cos ax\, dx$ je spojitá funkce v E_1 [spočtěte !], 3/ $F(a) = \int_0^1 x^a \, dx$ je spojitá funkce v $(-1,+\infty)$,

4/ $F(n) = \int_1^\infty x^n \, dx$ je spojitá funkce v $(-\infty,-1)$,

5/ $F(y) = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} \, dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$.

6,8. Dokažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{2 + x^a}$ je spojitá funkce v intervalu $(2,+\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a \in (2,+\infty)$, viz př.3,44-10.

2/ Ukažte, že F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,+\infty)$, kde $p > 2$.

Položíte-li $g(x) = \sup_{a \in \langle p,+\infty)} \frac{x}{2 + x^a}$ pro $x \in (0,+\infty)$

je

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in (0,1) \\ \frac{x}{2 + x^p} & \text{pro } x \in \langle 1,+\infty) . \end{cases}$$

(Promyslete a odůvodněte!)

Protože $\frac{x}{2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a $\frac{x}{2 + x^p} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ je

$g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (opět odůvodněte!) a jsou splněny předpoklady věty 60.

6,9. Ukažte, že funkce $I(a) = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^a} \, dx$ je spojitá v intervalu $(1,+\infty)$.

1/ Ukažte, že pro $a \in (1,+\infty)$ integrál konverguje.

2/ Ukažte, že funkce I je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$,

$$\text{majoranta } g(x) = \sup_{a \in \langle p,q\rangle} \left| \frac{\cos x}{x^a} \right| = \begin{cases} \frac{|\cos x|}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{|\cos x|}{x^p} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

snadno nahlédnete, že $g \in \mathcal{L}_{(\frac{1}{2},+\infty)}$

3/ Jako cvičení ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $\frac{\cos x}{x^a}$ na intervalu $(\frac{1}{2}, +\infty)$ pro $a \in \langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$:

a/ $g_1(x) = \dfrac{|\cos x|}{x^q} + \dfrac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \dfrac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max\left(\dfrac{1}{x^p}, \dfrac{1}{x^p}\right)$

d/ $g_4(x) = \dfrac{1}{x^p} + \dfrac{1}{x^q}$.

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot e^{-x}\,dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$.

1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0,+\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$.

Majoranta $g(x) = \sup\limits_{s\in\langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1), \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0,+\infty)$ pro $s \in \langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max\,(e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1})$,

b/ $g_2(x) = e^{-x}(x^{p-1} + x^{q-1})$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1,+\infty) \end{cases}$.

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^\infty \dfrac{x^{b-1}}{1+x}\,dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

2/ F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0,1)$, konvergentní majoranty:

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (0,1) \\[2ex] \dfrac{x^{q-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\[2ex] x^{q-2} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_3(x) = x^{p-1} + x^{q-2} \qquad \text{apod.}$$

6,12. Dokažte, že

a/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$,

b/ $F(a) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin \frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\,dx$ -"- v $(-1,+\infty)$,

c/ $F(a) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)}\,dx$ -"- v $(-\infty,2)$,

d/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ -"- $(-1,+\infty)$,

e/ $F(a) = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{|\log x|^a}$ -"- $(-\infty,1)$,

f/ $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-ax}\,dx$ -"- $(0,+\infty)$,

g/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \log(x^2+a^2)\,dx$ -"- $(0,+\infty)$.

6,13. Uvažujeme $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty a\, e^{-a^2 x}\,dx$.

1/ Dokažte, že integrál konverguje pro každé $a \in E_1$

2/ Dokažte, že F je funkce lichá.

3/ Dokažte, že F je spojitá v $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Vezměte libovolný interval $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$, potom zřejmě

$$a \in \langle p,q\rangle \Rightarrow \left| a e^{-a^2x} \right| \leq q e^{-p^2x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} . \rfloor$$

4/ Zkoumejme nyní spojitost funkce F v bodě $a = 0$. Abychom ukázali, že F je spojitá v bodě $a = 0$, stačilo by ukázat (ale není to nutné!), že F je spojitá v nějakém intervalu $\langle -p, +p\rangle$, kde $p > 0$.
Zkoumejme, jak vypadala majoranta na intervalu $(0,+\infty)$ pro $a \in \langle -p,p\rangle$

$$g(x) = \sup_{a \in \langle -p,p\rangle} \left| a e^{-a^2x} \right| = \max \left(p e^{-p^2x} ; \ \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

(proveďte podrobně!). Protože $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, nemůže být ani $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$. Vidíme, že se nám nepodaří nalézt konvergentní majorantu k funkci $a e^{-a^2x}$ na $(0,+\infty)$ pro žádný interval $\langle -p,+p\rangle$ (z toho ovšem ještě neplyne, že by funkce F nebyla spojitá v bodě $a = 0$!). Spočtěte však, že $F(0) = 0$, $F(a) = \frac{1}{a}$ pro $a \neq 0$ – tedy F není spojitá v bodě $a = 0$.
I když tedy funkce $f(x,a)$ byla spojitá pro každé pevné $x \in (0,+\infty)$ v bodě $a = 0$, není funkce $F(a) = \int_0^{\infty} f(x,a)\,dx$ spojitá v bodě $a = 0$.

6,14. Uvažujme $F(a) = \int_0^1 \operatorname{sign}(x-a)\,dx$.

1/ Pro každé $a \in E_1$ je $\operatorname{sign}(x-a) \in \Lambda_{(0,1)}$ (odůvodněte!).
Protože $|\operatorname{sign}(x-a)| \leq 1$ pro $x \in (0,1)$, je $\operatorname{sign}(x-a) \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ pro každé $a \in E_1$.

2/ Buď $x \in (0,1)$ pevné, potom funkce $\operatorname{sign}(x-a)$ (jakožto funkce a!) je spojitá ve všech bodech $a \in E_1$ s výjimkou bodu $a = x$, kde je nespojitá.

3/ Lehko zjistíte, že

$$F(a) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a \in (-\infty, 0\rangle , \\ 1 - 2a & \text{pro } a \in (0,1) \\ -1 & \text{pro } a \in \langle 1,+\infty) , \end{cases}$$

tedy F je spojitá v celém E_1.

Proti příkladu 6,13 je nyní $f(x,a)$ nespojitá (při pevném x jako funkce a/ a funkce $F(a)$ spojitá.

6,15. Uvažujeme $F(a) = \int_1^3 \operatorname{sign} a\,dx$.

1/ Ukažte, že pro libovolné $a \in E_1$ integrál konverguje.

2/ Funkce $\operatorname{sign} a$ je nespojitá v bodě $a = 0$.

3/ Pro $a \in E_1$ je $F(a) = 2 \operatorname{sign} a$, tedy i F je nespojitá v bodě $a = 0$.

$\boxed{6,16.}$ Uvažujte obecně $F(a) = \int_M \varphi(a)\,dx$ pro $\mu M < +\infty$.

1/ Je-li $\varphi(a)$ konečná pro $a \in A$, integrál pro tato a konverguje,

2/ je-li $\mu M > 0$, potom

F je spojitá v bodě $a \iff \varphi$ je spojitá v bodě a,

3/ je-li $\mu M = 0$, je F spojitá v A (neboť $F = 0$).

Dokažte!

$\boxed{6,17.}$ Uvažujte $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x}$

Dokažte, že

1/ pro libovolné $\lambda \in E_1$ integrál existuje jako Riemannův,

2/ F je funkce sudá,

3/ $F(\lambda) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+|\lambda|}$ pro $|\lambda| \neq 1$

[použijte substituci $\operatorname{tg} x = t$]

4/ ukažte odtud, že $F(\lambda) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+|\lambda|}$ pro všechna $\lambda \in E_1$

[funkce $F(\lambda)$ i $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+|\lambda|}$ jsou spojité v E_1 a rovnají se pro všechna $\lambda \neq \pm 1$];

5/ spočtěte též přímo $F(1)$, $F(-1)$.

$\boxed{6,18.}$ Buďte

$$C(y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2}\,dx, \quad S(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{1+x^2}\,dx$$

Ukažte, že funkce C, S jsou spojité v E_1!

V dalším budeme vyšetřovat derivace integrálů závislých na parametru. Může se stát, že neumíme spočítat integrál $\int_M f(x,a)\,dx$ (běžnými metodami, obvykle jako Newtonův), označme jej $F(a)$. Naproti tomu se nám podaří spočítat $\int_M \frac{\partial}{\partial a} f(x,a)\,dx$, zajímá nás, jaký je nyní vztah tohoto integrálu a funkce $F'(a)$. Za určitých předpokladů (věta 61) mezi nimi platí rovnost. Takže i když přímo neumíme "spočítat $F(a)$", umíme "spočítat $F'(a)$" a určením příslušné primitivní funkce dostáváme $F(a)$.

Prostudujte si podrobně znovu poznámku 6,2 - chceme-li spočítat $F'(a)$ v intervalu (A,B), stačí, spočítáme-li $F(a)$ v každém intervalu $\langle p,q\rangle$ takovém, že $\langle p,q\rangle \subset (A,B)$.

6,19. Spočtěte $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$!

1/ I když to v těchto příkladech není nutné, budeme vždy zkoumat, pro jaké hodnoty parametru a daný integrál konverguje.

Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův pro všechna $a \in E_1$.

2/ Podle věty 61 spočítáme $F'(a)$, vzhledem k tomu, že funkce F je lichá (proč?), omezíme se jen na hodnoty $a \geq 0$, tj. ve větě 61 položíme $M = (0, \frac{\pi}{2})$, $A = \langle 0,+\infty)$.

Ověřujeme jednotlivé předpoklady věty 61:

a/ pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ je $\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x} \in \Lambda_{(0,\frac{\pi}{2})}$ (proč?),

b/ integrál konverguje pro $a = 0$ (my jsme vlastně ukázali daleko více - že konverguje pro všechna $a \in E_1$!),

c/ pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ a každé $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ existuje

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\right) = \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x} ,$$

d/ musíme najít konvergentní majorantu k této derivaci, položme

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{a\in\langle 0,+\infty)} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x} \qquad \text{pro } x \in (0,\frac{\pi}{2}) ,$$

zřejmě $\mathcal{G}(x) = 1$ pro všechna $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, tedy $\mathcal{G} \in \mathcal{L}_{(0,\frac{\pi}{2})}$.

Podle tvrzení věty 61 integrál konverguje pro všechna $a \in \langle 0,+\infty)$ a

$$F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}\,dx , \quad a \in \langle 0,+\infty) .$$

Podle př. 6,17 zjistíme, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a} , \qquad a \in \langle 0,+\infty).$$

Odtud plyne, že existuje taková konstanta C , pro niž $F(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+a) + C$, $a \in \langle 0,+\infty\rangle$ (odůvodněte!).

Zbývá nyní jen určit hodnotu konstanty C . Víme však, že předchozí rovnost platí pro všechna $a \in \langle 0,+\infty)$, tedy i pro $a = 0$. Protože $F(0) = 0$, dostáváme ihned, že

$$0 = F(0) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+0) + C ,$$

tj. $C = 0$.

Uvědomíme-li si konečně, že F je lichá funkce, dostáváme

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\,\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx = \operatorname{sign} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+|a|), \quad a \in E_1 \,.$$

6,20. Dokažte, že $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx = \operatorname{sign} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+|a|)$ pro $a \in E_1$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$, označte jej $F(a)$.

2/ Použijte výsledku cvičení 6,19 a substituce $\operatorname{tg} x = t$.

3/ Ukažte, že F je funkce lichá.

4/ Ověřte, že jsou splněny předpoklady věty 61 – $M = (0,+\infty)$, $A = \langle 0,+\infty)$.

Nejdůležitější je opět nalezení konvergentní majoranty:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle 0,+\infty)} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

Odtud plyne, že

$$F'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

Ukažte, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

(nutno rozlišit případy $a = 0$, $a = 1$ anebo ukázat, že $F'(a)$ je spojitá v $\langle 0,+\infty)$ obojí proveďte podrobně!). Odtud vzhledem k podmínce $F(0) = 0$ a vzhledem k lichosti F dostáváme tvrzení.

6,21. Zkoumejte $K(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{x\,e^x}\,dx$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1,+\infty)$, pro $a \in (-\infty,-1\rangle$ je $K(a) = -\infty$.

2/ Ověřte předpoklady věty 61 ($M = (0,+\infty)$, $A = (-1,+\infty)$) – položíme-li

$$G(x) = \sup_{a \in A} \left| \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\right) \right| \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty),$$

je

$$G(x) = \sup_{a \in (-1,+\infty)} e^{-(a+1)x} = 1 \quad \text{pro každé } x \in (0,+\infty)$$

a tedy $G \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Musíme se proto omezit - obdobně jako u příkladů na spojitost - na libovolný interval $\langle p, +\infty)\subset(-1,+\infty)$.
Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a\in\langle p,+\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \qquad \text{pro } x\in(0,+\infty),$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x}\,dx = \frac{1}{a+1} \qquad \text{pro } a\in\langle p,+\infty).$$

Protože $\langle p,+\infty)$ byl <u>libovolný</u> interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \qquad \text{pro všechna } a\in(-1,+\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log(1+a) \qquad \text{pro } a\in(-1,+\infty).$$

6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k}$ pro $k\in(0,+\infty)$, $a\in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů - a,k. Ukažte, že integrál konverguje pro $k\in(0,+\infty)$, $a\in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k\in(0,+\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.

Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-kx}\cdot\frac{\sin ax}{x}\right)\right| = \left|e^{-kx}\cdot\cos ax\right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x\in(0,+\infty)$

(funkce G "nezávisí na a" a $G\in\mathcal{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx}\cdot\cos ax\,dx = \frac{k}{a^2+k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k} + C(k),$$

kde "konstanta" tentokrát může záviset na zvoleném $k \in (0,+\infty)$ (proč?).
Z původního integrálu je ovšem ihned vidět, že

$$F(0,k) = 0 \ , \quad \text{tj.} \quad C(k) = 0 \ .$$

II/ Zkusme nyní derivovat podle "k", nechť tedy $a \in E_1$ je pevné. Opět ověřte předpoklady věty 61,

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) = -\, e^{-kx} \cdot \sin ax \ .$$

Zde se nám již nepodaří najít majorantu společnou pro všechna $k \in (0,+\infty)$, to však nevadí - omezíme se opět pouze na $k \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$.

Potom

$$\left| e^{-kx} \sin ax \right| \leqq e^{-kx} \leq e^{-px} \ , \qquad x \in (0,+\infty)$$

a funkce $G(x) = e^{-px}$ je hledaná konvergentní majoranta. Integrací opět dostáváme (proveďte podrobně!, viz 4,47)

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(a) \ ,$$

kde "konstanta" opět může záviset na (ze začátku pevně zvolené) hodnotě a. Rovnost platí pro všechna $k \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$ bylo libovolné číslo, tedy výsledek platí pro všechna $k \in (0,+\infty)$.
Zbývá ještě určit $C(a)$, zde nám není nic platné do získané rovnosti dosadit $a = 0$ (proč?). Zkusíme provést limitní přechod pro $k \to +\infty$, bude-li totiž existovat $\lim_{k \to +\infty} F(a,k)$ (při pevném $a \in E_1$), bude

$$\lim_{k\to\infty} F(a,k) = \lim_{k\to\infty} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(a)\right] = C(a) \ .$$

Podle 4,20 (proveďte ještě jednou)! je $\lim_{k\to\infty} F(a,k) = 0$ pro libovolné $a \in E_1$. Teda $C(a) = 0$ pro každé $a \in E_1$ a jsme hotovi. ||

Z tohoto příkladu bylo velmi dobře vidět, že nebylo tak docela jedno, derivovali-li jsme podle jedné či druhé proměnné. V prvním případě byl přeci jenom postup o něco jednodušší. V dalších příkladech se vždy snažte derivovat podle všech proměnných a jednotlivé metody porovnávejte!

6,23. Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\, dx$ má v intervalu $(0,+\infty)$ derivace všech řádů. Spočtěte je !

|| 1/ Lehko zjistíme, že $F(a) = \frac{1}{a}$, odkud plyne tvrzení a vztah

$$F^{(n)}(a) = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \quad , \qquad a \in (0,+\infty).$$

2/ Na druhé straně ukažte, že

$$F^{(n)}(a) = (-1)^n \int_0^\infty x^n . e^{-ax}\, dx \, , \qquad a \in (0,+\infty)$$

věta 61 a matematická indukce!) ‖

Porovnáním obou výsledků dostáváme vztah

$$\int_0^\infty x^n . e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \text{pro } n = 1,2,\ldots a \in (0,+\infty).$$

6,24. Ukažte, že následující funkce mají v uvedených oborech derivace všech řádů, spočtěte je, a s jejich pomocí pak odvoďte další vztahy.

A/ $F(a) = \int_0^1 x^a\, dx \, , \qquad a \in (-1,+\infty)$,

$$\int_0^1 x^a . \log^n x\, dx = \frac{(-1)^n . n!}{(a+1)^{n+1}} \quad , \qquad a \in (-1,+\infty), \quad n \in N .$$

B/ $F(a) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^a} \quad , \qquad a \in (1,+\infty)$,

$$\int_1^\infty x^{-a} . \log^n x\, dx = \frac{n!}{(a-1)^{n+1}} \quad , \qquad a \in (1,+\infty), \quad n \in N ,$$

C/ $F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2} \qquad a \in (0,+\infty)$,

D/ $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx \, , \qquad a \in (0,+\infty)$ (viz 5,84) ,

E/ $F(a) = \int_0^2 \cos ax\, dx \, , \qquad a \in E_1$,

F/ $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx \, , \qquad s \in (0,+\infty)$.

6,25. Spočtěte $H(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\, dx$!

‖ a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1,+\infty)$.

b/ Ověříte-li předpoklady věty 61, jest

$$H'(a) = \int_0^\infty xe^{-(a+1)x^2}\, dx = \frac{1}{2(a+1)} \quad \text{pro každé } a \in (-1,+\infty) ,$$

protože $H(0) = 0$, jest $H(a) = \frac{1}{2} \log (a+1)$. ‖

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^\infty -xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a}\,,$$ konvergentní majoranta je

$$G(x) = xe^{-px^2} \quad \text{pro } x \in (0,+\infty),\ a \in \langle p,+\infty),\ p > 0\,.$$

Tedy

$$F(a,b) = -\frac{1}{2}\log a + C(b)\,,$$ protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2}\log b$, tj. $F(a,b) = \log\frac{b}{a}$.

6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x}\,.$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leqq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leqq \frac{1}{1-|a|} \leqq \frac{1}{1-p}\,,$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\,,$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \qquad \text{pro } a \in (-1,+1)\,.$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi\arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?), k důkazu posledního tvrzení použijte větu 60 a vztahu

$$a \in \langle -1,+1\rangle \Rightarrow \frac{\log(1-\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

proveďte podrobně ! ||

6,28. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$.

b/ Spočtěte $J(a)$ pomocí věty 61, dostanete

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x} \quad \text{s konvergentní majorantou}$$

$G(x) = \frac{2}{1-p^2}$ pro $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, $a \in \langle -p,+p\rangle \subset (-1,+1)$.

Po substituci $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, tedy

$(J(0) = 0)$ $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in (-1,+1)$.

c/ Ukažte, že funkce J je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$, odkud vyplyne, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in \langle -1,+1\rangle$ - viz předchozí příklad 6,27.

d/ Použijte též výsledku př. 6,27, dostanete

$$\pi \cdot \arcsin a = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)\,dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-a\cos x)}{\cos x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,dx = J(a) \quad \text{pro } a \in \langle -1,+1\rangle.$$ ||

6,29. Spočtěte $K(A) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+\sin A\cos x)}{\cos x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $A \in E_1$.

b/ Uvědomte si, že $K(A)$ je periodická funkce s periodou 2π.

c/ Při vlastním výpočtu (použití věty 61) je třeba vyloučit hodnoty, kde $|\sin A| = 1$ (proč?), vyjde $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$, $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k celé.

d/ Ukažte, že funkce K je spojitá v E_1, tedy $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$.

e/ Ukažte, že $K(A) = \pi A$ pro $A \in \langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\rangle$.

25535 Z12

f/ Nakreslete graf funkce $K(A)$!

g/ Má funkce $K(A)$ všude v E_1 derivaci ?

h/ Porovnejte výsledek s př. 6,27 - stačilo položit $a = \sin A$.

6,30. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a \in E_1$, $b \in E_1$ s výjimkou $a = b = 0$.

b/ Funkce $F(a,b)$ je sudá v „a" i „b", omezte se proto na $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

c/ Zvolme libovolné $b \in (0,+\infty)$ pevné, buď $a \in (0,+\infty)$.

Podle věty 61 dostanete

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\, dx$$

(majoranta pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$

$$\left| \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} \right| \leqq \left| \frac{2}{a} \right| \leqq \frac{2}{p} \in \mathcal{L}(0,\tfrac{\pi}{2}))$$

Substitucí $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{a+b}$.

Ze vztahu $F(b,b) = \pi \cdot \log b$ vyplyne konečně

$$F(a,b) = \pi \cdot \log \frac{a+b}{2} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad b > 0 .$$

d/ Ukažte, že výsledek platí i pro $a = 0$, $b > 0$ (či $a > 0$, $b = 0$) .

Buď tedy $b \in (0,+\infty)$ pevné, stačí ukázat, že funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a je spojitá v bodě 0 zprava. Použijte větu 60 ($x \in (0,\frac{\pi}{2})$, $a \in \langle 0,1\rangle$) a odhadu

$$\log b^2\cos^2 x \leqq \log(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) \leqq \log(1 + b^2)$$

e/ Pomocí předchozího výsledku odtud odvoďte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2} ,$$

viz též př. 5,87 ; 8,64 .

6,31. Spočtěte $I(a,b,k) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin kx \, dx$!

a/ Ukažte, že pro $a > 0$, $b > 0$, $k \in E_1$ integrál konverguje.

b/ Zvolte $k \in E_1$, $b \in (0,+\infty)$ pevně, buď $a \in (0,+\infty)$.

Potom

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b,k) = \int_0^\infty -e^{-ax} \sin kx \, dx = \frac{-k}{a^2+k^2} \quad \text{(viz př. 4,47)}$$

konvergentní majoranta $G(x) = e^{-px}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty) \subset (0,+\infty)$.

Odtud plyne, že

$$I(a,b,0) = 0 \quad \text{(přímo vidět)},$$

$$I(a,b,k) = \operatorname{arctg} \frac{b}{k} - \operatorname{arctg} \frac{a}{k} \quad \text{pro } k \neq 0,$$

neboť $I(b,b,k) = 0$.

c/ Výsledek srovnejte s příkladem 6,22, podle kterého jest

$$I(a,b,k) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin kx}{x} dx - \int_0^\infty e^{-bx} \frac{\sin kx}{x} dx =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{k}{a} - \operatorname{arctg} \frac{k}{b} \quad \text{pro } a > 0, \quad b > 0, \quad k \in E_1.$$

Není to ve sporu s předešlým výpočtem? Ukažte, že ne.

Pro $k = 0$ dostáváte v obou případech $I(a,b,0) = 0$.

Dále ukažte, že pro libovolné $z \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign} z,$$

odkud již vyplyne, že pro libovolná $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} z_1 - \operatorname{arctg} z_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{z_2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{z_1}.$$

6,32. Spočtěte $J(a,b,k) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos kx \, dx$!

Obdobně příkladu 6,31, obdržíte

$$J(a,b,k) = \frac{1}{2} \log \frac{b^2+k^2}{a^2+k^2} \quad \text{pro } k \in E_1, \ a > 0, \ b > 0.$$

6,33. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx$!

a/ Ukažte, že pro $a \in (0,+\infty)$, $b \in E_1$, $c \in E_1$ integrál konverguje.

b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{c}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0 \, , \quad b,c \in E_1 \, .$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22 .

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} \, dx$!

Obdoba př. 6,33 , $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, $b,c \in E_1$.

6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

b/ Buď $b \geqq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(viz př. 5,84)},$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

tedy – vzhledem k $F(b,b) = 0$ – jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro} \quad a > 0 \, , \quad b \geq 0 \, .$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Toto tvrzení dokažte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0$, $b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0$, $b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie. Vše podrobně proveďte !

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a .

6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1, +\infty)$.

b/ Pro $a \in (-1, +\infty)$ je podle věty 61 a př. 5,84

$$J'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x^2}\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a+1}} \quad , \text{ tedy}$$

$$J(a) = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{a+1} - 1) \quad \text{pro } a \in (-1, +\infty) \; .$$

c/ Ukažte, že $J(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí dokázat, že funkce J je spojitá v bodě -1 zprava (proč?), k důkazu tohoto tvrzení použijte větu 60, kde položíte $M = (0, +\infty)$, $A = \langle -1, 0 \rangle$ a použijete odhadu

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| \le \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

6,37. Spočtěte $K(a,b) = \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a, b \in E_1$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá funkce jak v proměnné „a", tak v „b", omezíme se na $a \ge 0$, $b \ge 0$.

c/ Buď tedy $b \ge 0$ pevné, $a \in (0, +\infty)$. Potom je $\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty -\frac{2a}{x^2} \cdot e^{-\frac{a^2}{x^2}}\, dx$

(majoranta – pro $a \in \langle p, q \rangle$, kde $0 < p < q < +\infty$ – určíme podle následujícího odhadu – proveďte !

$$\left| -\frac{2a}{x^2}\, e^{-\frac{a^2}{x^2}} \right| \le \frac{2q}{x^2} \cdot e^{-\frac{p^2}{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ převedeme poslední integrál na Laplaceův integrál – př. 5,84 – dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = -\sqrt{\pi} \quad ,$$

tedy vzhledem k $K(b,b) = 0$ vyjde

$$K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b - a) \quad \text{pro } b \ge 0 \; , \; a > 0 \; .$$

d/ Ukažte, že $K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b-a)$ pro všechna $a, b \in E_1$ (viz obdobný příklad 6,35).

e/ Porovnejte též s příkladem 5,76 e .

6,38. Spočtěte $J(a) = \int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}} dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

b/ Ukažte, že funkce J je spojitá v intervalu $\langle -1,+1 \rangle$

$\Big(a \in \langle -1,+1 \rangle \ , \ x \in (0,1) \ \Rightarrow$

$$\left| \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2 . \sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{|\log(1-x^2)|}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Big)$$

c/ Pro $a \in (-1,+1)$ jest

$$J'(a) = \int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2x^2) . \sqrt{1-x^2}} dx$$

$\left(\text{majoranta } G(x) = \frac{2p}{(1-p^2)\sqrt{1-x^2}} \text{ pro } a \in \langle -p,+p \rangle \subset (-1,+1) \right)$

Pomocí substitucí $x = \sin t$, $\operatorname{tg} t = u$ dostanete

$$J'(a) = -\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}} ,$$ tedy s přihlédnutím k části b/

je $$J(a) = \pi \cdot \left(\sqrt{1-a^2} - 1 \right) \text{ pro } a \in \langle -1,+1 \rangle .$$

6,39. Spočtěte $F(a) = \int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

b/ Funkce F je spojitá v $\langle -1,+1 \rangle$.

c/ $F(a) = \pi \cdot \log \frac{\sqrt{1-a^2}+1}{2}$ pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

6,40. Spočtěte $F(a) = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-1}} dx$!

a/ Integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$.

b/ Funkce F je lichá, omezíme se na $a \in \langle 0,+\infty)$.

Potom

$$F'(a) = \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+a^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

(majoranta $G(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$)

Pomocí substituce $u = \sqrt{x^2 - 1}$ je

$$F'(a) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \right)$$

a vzhledem k $F(0) = 0$

$$F(a) = \frac{\pi}{2}\left(1 + a - \sqrt{a^2+1}\right) \quad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty) .$$

c/ Čemu je rovno $F(a)$ pro $a < 0$?

6,41. Spočtěte $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\,.\,\sqrt{1-x^2}}\, dx$!

a/ Integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$.

b/ F je funkce lichá.

c/ $F(a) = \frac{\pi}{2} \log\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$ pro $a \geq 0$.

6,42. Spočtěte $K(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log (a^2+x^2)}{b^2+x^2}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a,b \in E_1$, $b \neq 0$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá v „a" i v „b" , omezíme se na $a \in \langle 0,+\infty)$, $b \in (0,+\infty)$.

c/ Ukažte, že pro každé pevné $b \in (0,+\infty)$ je funkce $K(a,b)$ spojitá jakožto funkce a v E_1

(pro $a \in \langle -p,+p \rangle$, kde $p > 0$, $x \in (0,+\infty)$ jest

$$\frac{\log x^2}{b^2+x^2} \leq \frac{\log (a^2+x^2)}{b^2+x^2} \leq \frac{\log (p^2+x^2)}{b^2+x^2} \;)$$

d/ Omezíme se na $a \in (0,+\infty)$; $b \in (0,+\infty)$ buď pevné.

Potom

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{2a}{(a^2+x^2).(b^2+x^2)}\, dx = \pi \frac{1}{b\,(b+a)}$$

(majoranta pro $a \in \langle p,q \rangle \subset (0,+\infty)$ je $\dfrac{2q}{(p^2+x^2)(b^2+x^2)} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$)

tedy $K(a,b) = \frac{\pi}{b} \cdot \log (b + a) + C(b)$ pro $a > 0$, $b > 0$.

Musíme ještě určit "konstantu" $C(b)$. Vzhledem k části c/ dostáváme

$$K(0,b) = \lim_{a\to 0_+} K(a,b) = \lim_{a\to 0_+}\left[\frac{\pi}{b}\cdot\log(b+a) + C(b)\right] = \frac{\pi}{b}\cdot\log b + C(b)$$

a zbývá nám tedy pouze spočítat $K(0,b) = \int_0^\infty \frac{\log x^2}{b^2+x^2}\,dx$. Pomocí substitucí $x = bt$, $t = \frac{1}{u}$ zjistíme, že $K(0,b) = \frac{\pi}{b}\log b$, tedy $C(b) = 0$.

e/ Lehko zjistíte, že

$$K(a,b) = \frac{\pi}{|b|}\cdot\log(|a| + |b|) \quad \text{pro } a,b\in E_1 ,\ b \neq 0 .$$

6,43. Spočtěte $F(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cdot\cos bx - e^{-\alpha x}\cdot\cos\beta x}{x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a > 0$, $\alpha > 0$, $b,\beta\in E_1$.

b/ Ukažte, že (viz př. 4,47 a 4,48)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-px} pro $a\in\langle p,+\infty)$, kde $p > 0$) ,

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-ax}) .

Odtud plyne , že

$$F(a,b,\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + C(\alpha,\beta) \quad \text{a}$$

vzhledem k podmínce $F(\alpha,\beta,\alpha,\beta) = 0$ jest

$$F(a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2+b^2} \quad \text{pro } a > 0 ,\ \alpha > 0 ,\ b,\beta\in E_1 .$$

6,44. Spočtěte $J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a > 0$, $b > 0$ či $a < 0$, $b < 0$.

b/ Předpokládejme, že $b > 0$ je pevné, buď $a\in(0,+\infty)$.
Potom

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$$

(majoranta $\frac{1}{1+p^2x^2}$ pro $a\in\langle p,+\infty)$, kde $p > 0$) .

Vzhledem k podmínce $J(b,b) = 0$ je

$$J(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b} \quad \text{pro} \quad a > 0 \,, \quad b > 0 \,.$$

c/ Jaký je výsledek pro $a < 0$, $b < 0$?

d/ Porovnejte též s příkladem 5,71. ‖

6,45.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2}\, dx$!

a/ Integrál konverguje pro každé $a \in E_1$, $b \in E_1$.

b/ Buď $a \in E_1$, potom funkce $H^{a,*}(b)$ je spojitá v E_1 (pro $b \in \langle -p,+p\rangle$ kde $p > 0$ je

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} ax \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^2} \right| \leq \frac{|\operatorname{arctg} ax| \,.\, |\operatorname{arctg} px|}{x^2} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)})$$

c/ Obdobně funkce $H^{*,b}(a)$ je spojitá v E_1 pro každé $b \in E_1$.

d/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)}\, dx$$

(majoranta $\frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+p^2x^2)} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$) .

Je nutno nyní spočítat tento integrál.

1/ Podle příkladu 6,20 je

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2} \log(1+\alpha) \quad \text{pro} \quad \alpha > 0 \,,$$

provedeme-li tedy v našem integrálu substituci $ax = t$, bude

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a}$$

2/ Kdybychom neznali výsledek příkladu 6,20 , byli bychom nuceni postupovat stejně jako v 6,20 , dostali bychom vlastně, že

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+b}$$

a odtud vzhledem k podmínce $\frac{\partial H}{\partial a}(a,0) = 0$ by bylo

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0 \,, \quad b \geq 0 \,.$$

Z kteréhokoliv tohoto výsledku obdržíme, že

$$H(a,b) = \frac{\pi}{2}\Big[(a+b)\log(a+b) - (a+b) - a\log a + a\Big] + C(b) .$$

Zbývá určit "konstantu" C(b). Vzhledem ke spojitosti (část c/) obdržíme

$$0 = H(0,b) = \lim_{a\to 0_+} H(a,b) = \frac{\pi}{2}(b\log b - b) + C(b) .$$

Odtud vzhledem k částem b/ a c/ dostáváme

$$H(a,b) = \frac{\pi}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a \cdot b^b} \qquad \text{pro} \quad a \geq 0 , \quad b \geq 0$$

(kde chápeme $0^0 = 1$!!) ‖

6,46.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right)^2 dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ je funkce $H^{a,*}(b)$ spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$ a pro každé $b \in \langle 0,+\infty)$ je funkce $H^{*,b}(a)$ spojitá v $\langle 0,+\infty)$.

c/ Buď $b > 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$. Potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\infty} -2 \cdot \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cdot e^{-ax}\, dx = \int_0^{\infty} -2 \cdot \frac{e^{-2ax} - e^{-(a+b)x}}{x} dx$$

(majoranta pro $a \in \langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$)

$$\left| -2 \cdot \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} e^{-ax} \right| \leqq 2 \cdot \left| \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right| \leqq$$

$$\leqq 2 \cdot \max\left(\left| \frac{e^{-px} - e^{-bx}}{x} \right| , \left| \frac{e^{-qx} - e^{-bx}}{x} \right| \right) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} .$$

Je nutno spočítat poslední integrál :

1/ Podle př. 6,32 je

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = -2 \cdot \frac{1}{2}\log\frac{(a+b)^2}{4a^2} = 2\log\frac{2a}{a+b} .$$

2/ Jako cvičení zkuste spočítat

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a\,\partial b}(a,b) = -2\int_0^{\infty} e^{-(a+b)x}\, dx = \frac{-2}{a+b} \quad (\text{s majorantou } e^{-ax}) .$$

Odtud vzhledem k $H(b,b) = 0$ a k spojitosti dostáváme

$$H(a,b) = \left[\frac{(2a)^a \cdot (2b)^b}{(a+b)^{a+b}}\right]^2 \qquad \text{pro } a \geq 0\,,\ b \geq 0$$

(opět $0^0 = 1$) . ‖

6,47. Spočtěte $H(a,b,k) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cdot \frac{\sin bx}{x} \cdot e^{kx}\,dx$!

‖ a/ Integrál konverguje pro $a,b \in E_1$, $k \geq 0$.

b/ Buďte $b \in E_1$, $k > 0$ pevné, potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b,k) = \int_0^\infty \cos ax \cdot \frac{\sin bx}{x}\, e^{-kx}\,dx$$

(majoranta $|b| \cdot e^{-kx}$) .

Spočtěte tento integrál,

1/ s použitím vztahů $\cos\alpha \ \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$
a příkladu 6,22, dostanete

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b,k) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{a+b}{k} - \operatorname{arctg}\frac{a-b}{k}\right),$$

2/ tím, že spočítáte $\frac{\partial^2 H}{\partial a\,\partial b}(a,b,k)$.

Obdržíte výsledek

$$H(a,b,k) = \frac{a+b}{2}\operatorname{arctg}\frac{a+b}{k} - \frac{a-b}{2}\operatorname{arctg}\frac{a-b}{k} + \frac{k}{4}\log\frac{k^2+(a-b)^2}{k^2+(a+b)^2}\ .$$

c/ Diskusi k případu $k = 0$ viz v cvičení 6,73 . ‖

6,48.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2) \cdot \log(1+b^2x^2)}{x^4}\,dx$!

‖ a/ Integrál konverguje pro všechna $a,b \in E_1$.

b/ Vyjádřete $\frac{\partial^2 H}{\partial a\,\partial b}(a,b)$. ‖

6,49. Spočtěte $J(b) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx\,dx$!

‖ a/ Integrál konverguje pro všechna $b \in E_1$.

b/ Podle věty 61 jest

$$J'(b) = -2\int_0^\infty x e^{-x^2} \sin 2bx\,dx$$

(majoranta $xe^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Integrací per partes pro Newtonovy integrály /odůvodněte ! /
dostáváme $J'(b) = -2\, J(b)$.
Toto je diferenciální rovnice pro funkci $J(b)$ jejímž řešením vzhledem k $J(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (viz 5,84) získáme

$$J(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2} .$$

c/ Porovnejte se cvičením 4,51 d . ||

6,50. Buď $P(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$.

a/ Ukažte, že pro $x \geq 0$ tento integrál konverguje.

b/ Ukažte, že pro $x \in (0,+\infty)$ funkce $P(x)$ vyhovuje diferenciální rovnici $y'' + y = \frac{1}{x}$.

6,51.* Spočtěte $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\, dt$!

a/ Integrál konverguje pro všechna $x \in E_1$.

b/ Funkce F je spojitá v E_1 ,

$$\left(e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} \leqq e^{-t^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \right) .$$

c/ Buď $x \in (0,+\infty)$, potom

$$F'(x) = \int_0^{\infty} -\frac{2x}{t^2} \cdot e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\, dt$$

(majoranta pro $x \in \langle p,q \rangle \subset (0,+\infty)$ je

$$\left| -\frac{2x}{t^2}\, e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} \right| \leqq \frac{2q}{t^2}\, e^{-t^2 - \frac{p^2}{t^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

proměnná je t !!)

d/ Ukažte, že $2F(x) - F'(x) = 2\, e^{-2x} . \sqrt{\pi}$

(použijte substituci $z = t - \frac{x}{t}$ a př. 5,84).

Řešením této diferenciální rovnice dostanete

$$F(x) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-4x} + K \right) e^{2x} \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty) ,$$

ze spojitosti obou stran v bodě $x = 0$ pak plyne $K = 0$.

Tedy $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$ pro $x \in \langle 0,+\infty)$.

e/ Ukažte, že je též splněna rovnice

$$F'(x) + 2\,F(x) = 0 \quad \text{a}$$

1/ vypočtěte z této diferenciální rovnice $F(x)$,

2/ řešte soustavu

$$2\,F(x) - F'(x) = 2\,e^{-2x} . \sqrt{\pi}$$

$$2\,F(x) + F'(x) = 0$$

jako soustavu dvou lineárních rovnic .

6,52. Posledním úkolem, kterým se budeme zabývat, je studium a nakreslení grafu funkce zadané integrálem, podrobněji - je dána funkce F , $F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx$, my máme nakreslit graf této funkce F .

Při řešení tohoto problému budeme postupovat takto:

1/ zjistíme maximální obor D_F ("definiční obor"), ve kterém je funkce F definována a konečná, tj. zjistíme množinu těch $\alpha \in E_1$, pro která konverguje $\int_M f(x,\alpha)\,dx$,

tedy $$D_F = \{ \alpha \in E_1 ; \quad f^{*,\alpha} \in \mathcal{L}_M \} ,$$

2/ budeme zkoumat spojitost funkce F v množině D_F ,

3/ spočítáme limity funkce F v "krajních bodech" množiny D_F , přesněji - je-li např. $D_F = (a,b)$, spočítáme

$$\lim_{\alpha \to b_-} F(\alpha) , \qquad \lim_{\alpha \to a_+} F(\alpha) ,$$

4/ budeme zkoumat monotonii F ,

5/ eventuelně pro podrobnější studium vyšetříme extrémy funkce F , resp. konkavitu a konvexitu.

6,53. Nakreslete graf funkce $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx$!

1/ Zjistěte, že $D_F = \langle 0,+\infty)$.

2/ Ukažte, že F je spojitá v $\langle 0,+\infty)$ (viz př. 6,3) .

3/ Ukažte, že $\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$ (viz př. 4,21).

4/ Ukažte, že F je nerostoucí v $\langle 0,+\infty)$:

a/ zvolte libovolné $\alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0,+\infty)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, potom ze vztahu

$$\frac{e^{-\alpha_1 x}}{1+x^2} \geqq \frac{e^{-\alpha_2 x}}{1+x^2} \qquad x \in (0,+\infty)$$

plyne i $F(\alpha_1) \geq F(\alpha_2)$ (ukažte, že dokonce $F(\alpha_1) > F(\alpha_2)$),

b/ $F'(a) < 0$ pro $a \in (0,+\infty)$, odtud plyne, že F je klesající v $(0,+\infty)$.

5/ Ukažte, že F je konvexní v intervalu $(0,+\infty)$ (spočtěte F'' !)

6/ Ukažte, že

$$\max F(a) = F(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \inf_{a \in \langle 0,+\infty)} F(a) = 0,$$

minima funkce F nenabývá.

7/* Ukažte, že $F'_+(0) = -\infty$.

(Podle známé věty - vyslovte ji a odůvodněte - jest

$$F'_+(0) = \lim_{a \to 0_+} F'(a) \quad \text{a zjistíte, že}$$

$$\lim_{a \to 0_+} F'(a) = \int_0^{\infty} \lim_{a \to 0_+} \left(-\frac{xe^{-ax}}{1+x^2}\right) dx = -\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx = -\infty \quad).$$

Jednotlivé kroky si znovu podrobně proveďte! Nakreslete graf ! ‖

6,54. Nakreslete graf funkce $F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$!

‖ 1/ $D_F = (-\infty, 0) \cup (0,+\infty)$, F je funkce sudá,

2/ F je spojitá v D_F,

3/ $\lim_{a \to 0_+} F(a) = +\infty$, $\lim_{a \to \infty} F(a) = 0$,

4/ F je klesající v intervalu $(0,+\infty)$

5/ F je konvexní v intervalu $(0,+\infty)$. ‖

6,55. Nakreslete grafy funkcí

a/ $F(a) = \int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\, dx$,

b/ $F(a) = \int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$, c/ $F(a) = \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-1}}\, dx$,

d/ $F(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax} - ax}{x^2}\, dx$.

Uveďme nyní v dalším, již nikterak systematicky, různé příklady.

6,56.* Buď $a > 0$, funkce f nechť je definována v intervalu $\langle 0,a \rangle$, nechť $f \in \mathcal{L}_{(0,a)}$ a nechť f je spojitá v bodě 0 zprava.
Potom

$$\lim_{h \to 0} \int_0^a \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot f(0) .$$

‖ Položte $I(h) = \int_0^a \frac{h}{h^2+x^2} (f(x) - f(0))\, dx$.

Buď $x_0 \in (0,a)$, $|f(x) - f(0)| \leq K$ pro $x \in (0,x_0)$. Ukažte, že

$$\lim_{h \to 0} \int_{x_0}^a \frac{h}{h^2+x^2} (f(x) - f(0))\, dx = 0 ,$$

$$\left| \int_0^{x_0} \frac{h}{h^2+x^2} f(x) - f(0))\, dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot K .$$

Odtud již lehko odvodíte, že $\lim_{h \to 0} I(h) = 0$ a poté tvrzení. ‖

6,57.* Nechť funkce f,g jsou definovány v E_1 , nechť $(L) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 1$.
Buď $x_0 \in E_1$, předpokládejme ještě, že f je omezená v E_1 a spojitá v bodě x_0 . Potom

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g\left(\frac{x-x_0}{y}\right) dx = f(x_0) .$$

Dokažte!

‖ Použijte substituci $x - x_0 = ty$ a větu 60 . ‖

6,58. Ukažte, že

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-ax} \cdot \cos bx\, dx = \frac{a^2 - b^2}{(a^2+b^2)^2} ,$$

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-ax} \cdot \sin bx\, dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$$

pro $a > 0$, $b \in E_1$.

‖ Odvoďte derivací výsledků z př. 4,47 a 4,48. ‖

6,59.* Ukažte, že

$$\int_0^a \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{\log(1+ax)}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(\log 2)\,.\,\operatorname{arctg} a + \frac{\pi}{8}\log(1+a^2),$$

pro libovolné $a > -1$.

‖ Ukažte, že

1/ integrály konvergují pro $a > -1$,

2/ $\int_0^a \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ je primitivní funkcí k funkci

$$\frac{\log(1+a)}{1+a^2} \quad \text{na intervalu} \quad (-1,+\infty),$$

3/ derivace levé strany rovnosti je rovna derivaci pravé strany rovnosti pro libovolné $a > -1$,

4/ pro $a = 0$ je rovnost splněna. ‖

6,60.* Ukažte, že

$$\int_1^a \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{\log(1+ax)(a+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.\,\log(1+a^2)$$

pro libovolné $a > 0$.

‖ Volte stejný postup jako v př. 6,59. ‖

6,61. Ukažte, že

$$(R)\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,.\,\log 2\,.$$

‖ Dosaďte $a = 0$ do rovnosti v př. 6,59 anebo $a = 1$ do rovnosti v příkladu 6,60. ‖

6,62.* Ukažte, že

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}\,dx = \log 2 \quad \text{pro } a \in (-1,+\infty).$$

Ukažte, že

1/ pro $a > -1$ integrál konverguje ,

2/ $F'(a) = 0$ pro $a \in (-1,+\infty)$,

3/ $F(0) = \log 2$.

6,63.* Ukažte, že

$$\left[\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right]^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt \quad \text{pro } x \in E_1 .$$

Ukažte, že

1/ $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ je primitivní funkce k funkci e^{-x^2} na intervalu $(0,+\infty)$,

2/ derivace levé i pravé strany rovnosti jsou stejné na intervalu $(0,+\infty)$ /pozor při derivování složené funkce !/ ,

3/ proveďte limitní přechod pro $x \to +\infty$ a využijte výsledků příkladů 5,84 a či dosaďte $x = 0$.
Vše proveďte podrobně a odůvodněte ! .

6,64.* Dokažte, že

$$F(a,b) = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{bx^{ab-1}}{1-x^b}\right) dx = \log b$$

pro $a \in (0,+\infty)$, $b \in (0,+\infty)$!

Ukažte, že

1/ integrál pro $a > 0$, $b > 0$ konverguje,

2/ $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ pro každé $b > 0$ na intervalu $(0,+\infty)$,

3/ $F(1,b) = \log b$.

6,65.° Vyšetřujte funkci

$$F(a) = \int_0^1 \log(x^2 + a^2)\,dx .$$

Ukažte, že

1/ integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$,

2/ funkce F je spojitá funkce v E_1 /viz podobný příklad 6,12 g/ ,

3/ $F(a) = \log(1+a^2) - 2 + 2a \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$ pro $a \neq 0$, $F(0) = -2$,

25535 Z13

4/ $F'(a) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{a}$ pro $a \neq 0$, $F'_+(0) = \pi$, $F'_-(0) = -\pi$.

Mechanickým derivováním - bez ověření předpokladů - dostáváme chybný výsledek

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{2a}{x^2+a^2}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } a = 0 \\ 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{a} & \text{pro } a \neq 0\,. \end{cases}$$

Rozmyslete !

$\boxed{6{,}66.^{\circ}}$ Vyšetřujte funkci

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^a}{\log x}\,dx\,.$$

Ukažte, že

1/ $F(a) = -\infty$ pro libovolné $a \in E_1$,

2/ mechanickým derivováním integrálu za integračním znamením dostanete $F'(a) = \frac{1}{a+1}$ pro $a \in (-1,+\infty)$

(který předpoklad věty 61 není splněn ?).

$\boxed{6{,}67.}$ Předpokládejte, že jste odvodili vzorce

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x^p)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6p}\,, \qquad \int_0^1 \frac{\log(1+x^p)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p}$$

pro $p \in (0,+\infty)$ (viz kupř. 4,45).

Odvoďte odtud pomocí derivace integrálu podle parametru, že

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{6p^2}\,, \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p^2}$$

pro $p \in (0,+\infty)$.

$\boxed{6{,}68.^{*}}$ Vyšetřujte funkci

$$F(a,b,m) = \int_0^{\infty} \log\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right)\cos mx\,dx\,.$$

Ukažte, že

1/ integrál konverguje pro libovolné hodnoty $a,b,m \in E_1$,

2/ je-li $a,b \in E_1$ pevné, je funkce $F(a,b,m)$ spojitá jakožto funkce m v E_1 /přesněji funkce $F^{a,b,*}$ je spojitá v E_1 pro libovolné $a,b \in E_1$ / .

Spočtěte $\frac{\partial F}{\partial a}$ s použitím př. 5,92 a a odtud spočtěte $F(a,b,m)$ /nutno rozlišit případy $m = 0$ a $m \neq 0$, viz též př. 5,91 /.

6,69. Dokažte, že

$$\int_0^1 x^{p-1} \cdot \sin(q\log x)\,dx = \frac{-q}{p^2+q^2}\ , \quad \int_0^1 x^{p-1} \cdot \cos(q\log x)\,dx = \frac{p}{p^2+q^2}$$

pro libovolné $q \in E_1$, $p \in (0,+\infty)$.

Použijte výsledků př. 4,47 a 4,48 spolu se substitucí $\log x = t$.

6,70. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1} \cdot \sin(q\log x)}{\log x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$ pro $p \in (0,+\infty)$, $q \in E_1$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1} \cos(q \log x)}{\log x}\,dx$ diverguje pro libovolné hodnoty p,q .

a/ Odvoďte derivováním integrálu /derivujte podle p i q !/ s použitím př. 6,69 .

b/ Zkoumejte chování integrálu v okolí bodu 1 .

Co nám dá mechanické derivování ?

6,71.* Dokažte, že

$$F(a,b) = \int_0^{\pi} \log(a \pm b\cos x)\,dx = \pi \log \frac{a + \sqrt{a^2-b^2}}{2}$$

pro $0 < b \leq a$.

Ukažte, že $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ a použijte výsledku příkladu 8,66 - část 11 či př. 5,87 nebo př. 6,30 e .

6,72. Ukažte, že

$$F(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{1-\cos x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2} \quad \text{pro } a \in (0,+\infty)\ .$$

Lehko zjistíte podle př. 4,48, že $F'(a) = \frac{a}{a^2+1} - \frac{1}{a}$, odtud tedy plyne, že $F(a) = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2} + C$ a provedete limitní přechod pro $a \longrightarrow +\infty$.

Viz též př. 5,95 .

6,73. Ukažte, že

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 bx}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot |b| \qquad \text{pro} \quad b \in E_1 .$$

Použijte příkladu 6,47 , kde provedete limitní přechod pro $k \to 0_+$, viz též př. 5,93 .

6,74.* Ukažte, že

$$F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot |b| - \sqrt{a\pi}$$

pro $a \in \langle 0,+\infty)$, $b \in E_1$.

1/ Použijte vztahu

$$F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - 1}{x^2}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos bx}{x^2}\, dx$$

a výsledků příkladů 6,35 a 6,73 .

2/ Ukažte, že $F(a,b) = -\sqrt{a\pi} + C(b)$ /derivace podle "a" s př. 5,84/, odtud vyplyne, že

$$C(b) = \lim_{a \to 0_+} F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos bx}{x^2}\, dx \quad \text{a opět}$$

použijeme 6,73 .

3/ Dostanete výsledek též derivováním podle "b" ? .

6,75.* Ukažte, že

1/ $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cdot \cos mx\, dx = \sqrt{\frac{\pi (a + \sqrt{a^2 + m^2})}{2(a^2 + m^2)}} \quad \text{pro} \quad a \in (0,+\infty) , \quad m \in E_1 ,$$

2/ $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x\sqrt{x}} \sin mx\, dx = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\sqrt{a^2 + m^2} - a}$$

pro $a \in (0,+\infty)$, $m \geq 0$.

1/ Substituce $x = t^2$ a př. 5,94 .

2/ Derivace podle "m" a výsledek první části .

6,76. Buď $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Pro každé $x \in (a,b)$ buď $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Je-li f spojitá v bodě x_0 , existuje $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$. Dokažte !

(Více o funkci F viz dodatku D IV).

Odhadněte $\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right|$.

6,77. ** Ukažte, že

$$F(b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \pi b} \quad \text{pro} \quad b \in (0,1)\ .$$

1/ Integrál konverguje pro $b \in (0,1)$.

2/ Dokažte, že $F(b) = \dfrac{\pi}{\sin \pi b}$ nejdříve pro

$b \in (0,1)$ racionální .

3/ Ukažte, že funkce F je spojitá v $(0,1)$ - viz př. 6,11 .

4/ Odtud ǎvoďte již tvrzení .

Viz též V.Jarník, Integrální počet II, kap. VII, § 5.

6,78. Spočtěte následující integrály .

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x^p)(1-x^q)}{\log x}\, dx$,

b/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\sin x)}{\sin x}\, dx$,

c/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\sin^2 x)}{\sin^2 x}\, dx$,

d/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}\,(a^2 \operatorname{tg}^2 x)\, dx$,

e/ $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{cotg} ax \,.\, \operatorname{cotg} bx\, dx$,

f/ $\displaystyle\int_0^{\infty} \log\,(1+\frac{a^2}{x^2}) \,.\, \log\,(1+\frac{b^2}{x^2})\, dx$,

g/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x) \,.\, \cos 2nx\, dx$,

h/ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log\,(1+a^2x^2) \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^3}\, dx$,

i/ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \,.\, \operatorname{arc\,cotg} \frac{x}{p}}{x^2+q^2}\, dx$, j/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (a^2 + b^2 tg^2 x)\, dx$,

k/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (1 + p \sin^2 x)\, dx$.