5. Míra množin, Fubiniova věta, substituční metoda

Znovu si uvědomte, že uvažujeme pouze případ $Z = C_r$, $Af = (R)\int_{E_r} f$, můžeme proto používat následující věty: věta 50, 51, 52, věta 58 /Fubiniova/, věta 59 /věta o substituci/.

Zopakujte si je !

Připomeňme ještě, že symbolem $\mathfrak{M}_r$ označujeme systém všech měřitelných množin v E_r , symbolem μ_r r - rozměrnou Lebesgueovu míru v E_r .

Ze začátku této kapitoly si uveďme několik příkladů na jednorozměrnou míru v E_1 .

5,1. Nalezněte příklad množiny $A \in \mathfrak{M}_1$ tak, aby

1/ A byla neomezená v E_1 , $\mu_1 A = 0$,

2/ A byla neomezená v E_1 , $\mu_1 A = 1$,

3/ A byla neomezená v E_1 , $A \neq E_1$, $\mu_1 A = +\infty$.

Ve všech případech - pokud to ovšem je možné - volte množinu A ještě tak, aby

a/ byla otevřená , b/ byla uzavřená ,

c/ nebyla ani otevřená ani uzavřená .

5,2. Sestrojte příklad posloupnosti množin $E_n \in \mathfrak{M}_1$ tak, aby $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots\ldots$, $\mu_1 E_n < +\infty$ pro každé $n \in N$ a

1/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty$,

2/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < +\infty$.

5,3. Sestrojte příklad posloupnosti množin $E_n \in \mathfrak{M}_1$ tak, aby $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots\ldots$, $\mu_1 E_n = +\infty$ pro každé $n \in N$ a

1/ $\mu_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty$,

2/ $\mu_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 3$, ,

3/ $\mu_1\left(\bigcap_{n=1} E_n\right) = 0$.

5,4. Je dána posloupnost nezáporných čísel a_n, buď $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Sestrojte příklad posloupnosti množin $E_n \in \mathfrak{M}_1$ /pokud to lze/ tak, aby
$\mu_1 E_n = a_n$ a

1/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$,   3/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = a$,

2/ $0 < \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < a$,   4/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) > a$.

5,5.° Buď $A \in \mathfrak{M}$, potom

$$\mu_1 A = \inf \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) ,$$

kde (a_n, b_n) jsou libovolné intervaly takové, že $\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n) \supset A$
a infimum se bere přes všechny možné takovéto součty. Ukažte, že tvrzení zůstane v platnosti, budeme-li uvažovat jen disjunktní /anebo disjunktní omezené/ intervaly. Viz též dodatek D III.4.

⟦ Použijte větu 55 a tvrzení, že libovolnou neprázdnou otevřenou množinu v E_1 lze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha disjunktních otevřených intervalů. ⟧

5,6. Ukažte, že množina všech racionálních čísel v E_1 je měřitelná a má míru nula.

⟦ a/ Viz větu 52 .

b/ Tvrzení dokažte přímo z definice - viz př. 2,31.

c/ Použijte též předchozího cvičení 5,5 . ⟧

5,7.* Věta 52 nám říká, že každá spočetná množina v E_1 je nulová.
Naskýtá se otázka, zda vůbec existuje nějaká nespočetná /zopakujte si definici spočetné a nespočetné množiny !/ množina v E_1 míry nula. Odpověď je positivní - uveďme si příklad.
Zaveďme následující označení /kreslete!/:

$$R_0 = \langle 0,1 \rangle ,$$

$$R_1 = \langle 0,1 \rangle - \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \langle 0, \tfrac{1}{3}\rangle \cup \langle \tfrac{2}{3}, 1 \rangle ,$$

$$R_2 = R_1 - \left[\left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right)\right] = \langle 0, \tfrac{1}{9}\rangle \cup \langle \tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\rangle \cup \langle \tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\rangle \cup$$
$$\cup \langle \tfrac{8}{9}, 1 \rangle , \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ atd .}$$

máme-li již sestrojenou množinu R_n , dostaneme množinu R_{n+1} tak, že ze všech intervalů množiny R_n vynecháme prostřední třetiny /podejte přesnou definici pomocí matematické indukce !/.

Zřejmě

1/ $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots\ldots$,

2/ R_n pro libovolné n je množina uzavřená .

Označme $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$, množina C se nazývá obyčejně <u>Cantorovo diskontinuum.</u>

Ukažte, že

3/ množina C je uzavřená

‖ C je průnik uzavřených množin ‖ ,

4/ $\mu_1 C = 0$

‖ množina $R_n \in \mathfrak{M}_1$ je disjunktním sjednocením 2^n intervalů délky $\frac{1}{3^n}$, tedy

$\mu_1 R_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, nyní se užije věta 17 ‖ ,

5/ libovolné číslo $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ lze psát ve tvaru

$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, kde $a_n = 0,1$ nebo 2 /rozvoj čísla α v "trojkové" soustavě/, tento rozvoj je jednoznačný, požadujeme-li, aby

$$\alpha > \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} \text{ pro každé přirozené } k ,$$

6/ $x \in C \iff x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, kde $a_n \neq 1$ pro každé $n \in N$,

7/ množina C je nespočetná

‖ libovolnému $x \in C$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ přiřaďme bod $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ a ukažte, že množina $\{ \varphi(x) ; x \in C \}$ je nespočetná ‖,

8/ Množina C je řídká , tj. vnitřek množiny C je prázdná množina - anebo ekvivalentně - doplněk množiny C v $\langle 0,1 \rangle$ je množina hustá v $\langle 0,1 \rangle$.

Viz též V.Jarník, Diferenciální počet II .

$\boxed{5{,}8.^{\circ}}$ Buď $G \subset E_1$ otevřená množina , $\mu_1 G = 0$. Potom $G = \emptyset$. Dokažte !

‖ Nechť $x \in G$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $(x - \delta , x + \delta) \subset G$ /odůvodněte!/ .

Tedy $\mu_1 G \geq \mu_1(x - \delta , x + \delta) = 2\delta$. ‖

5,9.° Buď $F \subset \langle 0,1 \rangle$ uzavřená množina, $\mu_1 F = 1$. Potom $F = \langle 0,1 \rangle$, dokažte !

‖ Použijte předchozí cvičení a větu 15 . ‖

5,10.° Ukažte, že platí /nemusí se ani jednat o množiny v E_1/:

a/ M nulová $\Longrightarrow M \in \mathcal{M}$,

b/ $M_1 \subset M$, M nulová $\Longrightarrow M_1$ nulová .

5,11.° Ukažte, že platí:

$$A \in \mathcal{M}\ ,\ M \text{ nulová } \Longrightarrow A - M \in \mathcal{M},\ \mu A = \mu(A - M)\ .$$

‖ Podle věty 13 a cvičení 5,10 a/ jest $A - M \in \mathcal{M}$, dále použijte vztahu $A = (A - M) \cup (A \cap M)$, větu 15 a cvičení 5,10b . ‖

5,12.° Nechť $A \in \mathcal{M}$, M nulová, $f \in \mathcal{L}^*_A$. Potom $f \in \mathcal{L}^*_{A-M}$ a $\int_{A-M} f = \int_A f$. Dokažte !

‖ Použijte cvičení 5,11 , větu 24 a větu 26 . ‖

5,13.° (Důležité !!).

Ukažte, že Fubiniovu větu lze užít v následujících speciálních případech:

I/ množina $M \subset E_{r+s}$ je otevřená nebo uzavřená, funkce f je spojitá a nezáporná (resp. nekladná) na M ,

II/ množina $M \subset E_{r+s}$ je otevřená nebo uzavřená a omezená, funkce f je spojitá a omezená na M .

‖ V obou případech lehko ukážete, že $f \in \mathcal{L}^*_M$. ‖

5,14. Označení:

Buď f funkce dvou proměnných, $f \in \mathcal{L}^*_M$. Potom budeme značit

$$A_M f = \iint_M f = \iint_M f(x,y)\, dx\, dy$$

a tento integrál budeme nazývat dvojným integrálem funkce f přes množinu M .

Nechť M_x znamená průmět množiny M do osy x , tj.

$$M_x = \left\{ x \in E_1\ ;\ \text{existuje } y \in E_1 \text{ tak, že } [x,y] \in M \right\}.$$

Potom podle Fubiniovy věty je pro sk.vš. $x \in E_1$ $f^{x,*} \in \mathcal{L}^*_{M^{x,*}}$ a označíme-li $F(x) = \int_{M^{x,*}} f^{x,*}$, je $F \in \mathcal{L}^*_{M_x}$ a $\iint_M f = \int_{M_x} F$.

Můžeme tedy psát, že

$$\iint_M f = \int_{M_x} \Big(\int_{M^{x,*}} f^{x,*} \Big) = \int_{M_x} \Big(\int_{M^{x,*}} f^{x,*}(y)\,dy \Big) dx .$$

Zřejmě též

$$\iint_M f = \int_{M_y} \Big(\int_{M^{*,y}} f^{*,y} \Big) = \int_{M_y} \Big(\int_{M^{*,y}} f^{*,y}(x)\,dx \Big)\, dy ,$$

kde $M_y = \{ y \in E_1 ,\ \text{existuje } x \in E_1 \text{ pro něž } [x,y] \in M \}$,

je průmět množiny M do osy y.

Poslední integrály budeme nazývat dvojnásobnými integrály funkce f přes množinu M.

V případě, že M_x je interval (a,b) a $M^{x,*}$ interval $(\varphi(x), \psi(x))$ – krajní body mohou pochopitelně záviset na x !! – pišme krátce místo

$$\int_{M_x} \Big(\int_{M^{x,*}} f^{x,*}(y)\,dy \Big)\, dx \quad \text{integrál} \quad \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^{x,*}(y)\, dy \Big)\, dx$$

a zpravidla se budeme dopouštět nekorektnosti a místo posledního integrálu budeme psát

$$\int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx.$$

Jsou-li M_x, $M^{x,*}$ jiné intervaly než otevřené (uzavřené, polootevřené), ponechme stejné označení (viz poznámku 3,1).

Obdobná poznámka platí pro obrácené pořadí integrace.

Nakonec ještě připomeňme definici míry množiny:

je-li $M \subset E_2$, $M \in \mathcal{M}_2$, definujeme $\mu_2 M = \iint_M 1$;

podle předešlé poznámky a Fubiniovy věty je pro

$M_x = (a,b)$, $M^{x,*} = (\varphi(x) , \psi(x))$ či

$M_y = (c,d)$, $M^{*,y} = (\omega(y) , \eta(y))$,

$$\mu_2 M = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \Big)\, dx = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx = \int_c^d \Big(\int_{\omega(y)}^{\eta(y)} dx \Big)\, dx =$$

$$= \int_c^d (\eta(y) - \omega(y))\, dy .$$

Stejná poznámka se týká i vícerozměrných integrálů, kde pak mluvíme o trojných či trojnásobných integrálech apod.

5,15. Buď $M = \{ [x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 = 7 \}$. Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 0$. Dokažte !

‖ Nakreslete si obrázek množiny M !

Zřejmě $M = M_1 \cup M_2$, kde

$$M_1 = \{ [x,y] \in E_2 ; \ y = \sqrt{7 - x^2} , \quad x \in \langle -\sqrt{7}, +\sqrt{7} \rangle \},$$

$$M_2 = \{ [x,y] \in E_2 ; \ y = -\sqrt{7-x^2} , \quad x \in \langle -\sqrt{7}, +\sqrt{7} \rangle \},$$

Podle věty 62 - ověřujte ! - je $M_1 \in \mathcal{M}_2$, $M_2 \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M_1 = \mu_2 M_2 = 0$. Nyní stačí použít větu 12 a 15 či faktu, že sjednocení spočetného systému nulových množin je množina nulová.

Viz též př. 5,103 . ‖

5,16. Buď $p \subset E_2$ libovolná přímka, potom $p \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 p = 0$.
Dokažte!

‖ Nechť např. přímka p není rovnoběžná s osou y - v opačném případě pouze prohodíme osy - potom existuje lineární funkce f , $f(x) = ax + b$, v E_1 tak, že

$$p \equiv \{ [x,y] \in E_2 ; \quad y = ax + b , \quad x \in E_1 \} .$$

Tedy opět podle věty 62 dostáváme, že p je nulová množina v E_2 . ‖

5,17. Buď $p \subset E_2$ libovolná přímka, $X \subset p$ libovolná podmnožina p . Potom X je nulová množina v E_2 . Dokažte !

‖ Při důkazu použijte cvičení 5,10 b) a 5,16 . ‖

Speciálně, je-li např. $X \subset E_1$ lebesgueovsky neměřitelná množina v E_1 , je množina $\{ [x,y] \in E_2 ; \ x \in X ; \ y = 0 \}$ vždy měřitelná (a nulová) v E_2 .

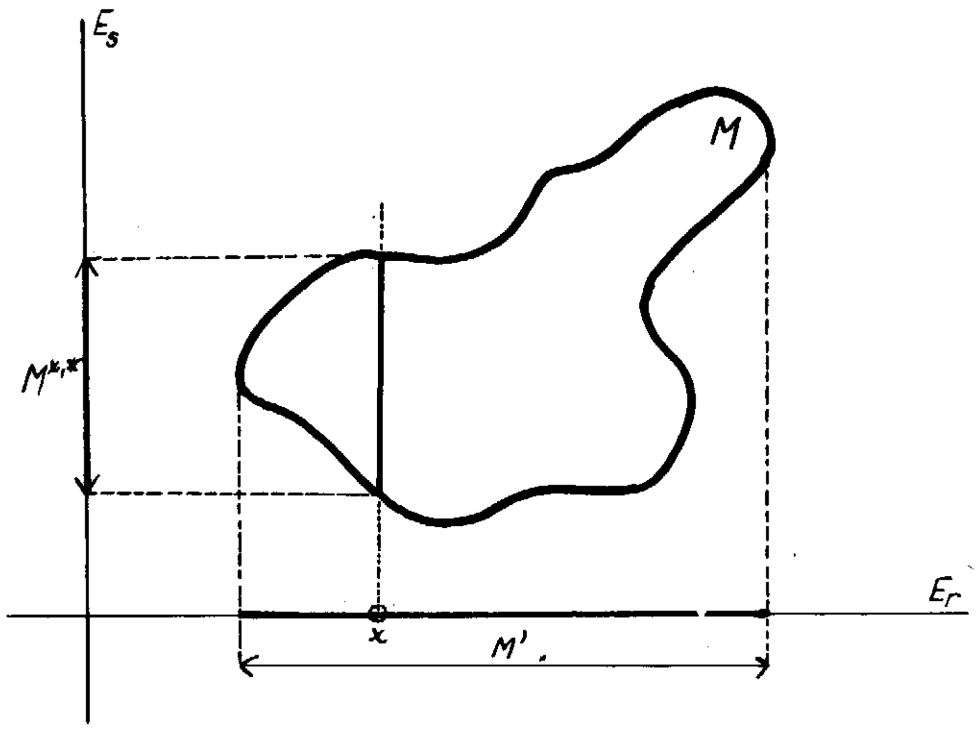
5,18. Dokažte toto speciální znění Fubiniovy věty:

buď $M \subset E_{r+s}$, $M \in \mathcal{M}_{r+s}$, buď M' průmět množiny M do prostoru E_r prvních r souřadnic, tj. $M' = \{ x \in E_r ; \text{ existuje } y \in E_s \text{ tak, že } [x,y] \in M \}$.

Potom pro sk.vš. $x \in E_r$ je $M^{x,*} \in \mathcal{M}_s$ a označíme-li $F(x) = \mu_s(M^{x,*})$, je $F \in \mathcal{L}^{R}_{M'}$ a

$$\mu_{r+s} M = \int_{M'} F .$$

Nakreslete si příslušný obrázek !



Obrázek č.5

Ve větě 58 stačí položit $f = c_M$.

5,19. Buď $K = \{[x,y] \in E_2 \;;\; x^2 + y^2 \leqq 6\}$. Ukažte, že

$$K \in \mathfrak{M}_2 \quad \text{a} \quad \mu_2 K = 6\pi \;!$$

1/ Množina K je uzavřená v E_2 (dokažte!), tedy $K \in \mathfrak{M}_2$ podle věty 50.

2/ Označme K_x průmět množiny K do osy x, tj.

$$K_x = \{x \in E_1 \;;\; \text{existuje } y \in E_1 \text{ pro něž } [x,y] \in K\} .$$

Zřejmě $K_x = \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$ - dokažme toto tvrzení pořádně a podrobně. Abychom tedy ukázali, že

$K_x = \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$, je nutné a stačí dokázat, že jednak $K_x \subset \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$ a jednak $K_x \supset \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$.

a/ Buď $x \in K_x \Rightarrow$ existuje $y \in E_1$, pro něž $[x,y] \in K$, tj. pro něž $x^2 + y^2 \leqq 6$. Potom ovšem $x^2 \leqq 6 - y^2 \leqq 6 \Rightarrow |x| \leqq \sqrt{6}$, což jest $x \in \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$. Tím jsme ukázali, že $K_x \subset \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$.

b/ Buď $x \in \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle \Rightarrow$ určitě existuje $y_0 \in E_1$ - např. $y_0 = 0$ - pro něž $x^2 + y_0^2 \leqq 6$, tedy $[x,y_0] \in K \Rightarrow x \in K_x$.

Tím jsme ukázali, že $\langle -\sqrt{6}\,,\ +\sqrt{6}\rangle \subset K_x$.

3/ Zřejmě dále

$K^{x,*} = \emptyset$ pro $x \in (-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$,

$K^{x,*} = \langle -\sqrt{6-x^2}\,,\ +\sqrt{6-x^2}\rangle$ pro $x \in \langle -\sqrt{6}\,,\ +\sqrt{6}\rangle = K_x$,

(zde chápeme $\langle a, a\rangle = \{a\}$) – opět podrobně vysvětlete!

Tedy $\mu_1 K^{x,*} = 2 \cdot \sqrt{6 - x^2}$ (podle věty 51) a

$$\mu_2 K = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} 2\sqrt{6 - x^2}\, dx = 6\pi .$$

V praxi obyčejně postupujeme rychleji (musíme ovšem umět všechny jednotlivé kroky odůvodnit!):

Množina K je uzavřená, tedy měřitelná; $K_x = \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6}\rangle$, pro $x \in \langle -\sqrt{6}\,,\ +\sqrt{6}\rangle$ jest $K^{x,*} = \langle -\sqrt{6 - x^2}\ ;\ +\sqrt{6 - x^2}\rangle$, tedy

$$\mu_2 K = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \Big(\int_{-\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6-x^2}} 1\, dx \Big)\, dx = 6\pi .$$

Jako cvičení zkuste změnit pořadí integrace ! ‖

5,20. Buď $M = \{[x,y] \in E_2\ ;\ x^2 + y^2 < 6\}$. Potom $M \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 M = 6\pi$.
Dokažte !

‖ M je otevřená množina v E_2 , tedy $M \in \mathfrak{M}_2$. Označíme-li

$$H(M) = \{[x,y] \in E_2\ ;\ x^2 + y^2 = 6\} ,$$

je $H(M) \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 H(M) = 0$ (viz obdobný př. 5,15).
Potom $\mu_2(M \cup H(M)) = \mu_2 M$, podle předchozího cvičení je

$$\mu_2(M \cup H(M)) = 6\pi .$$

Jako cvičení spočtěte $\mu_2 M$ přímo ! ‖

5,21. Buď K libovolný kruh v E_2 , tj.

$$K = \{[x,y] \in E_2\ ;\ (x - m)^2 + (y - n)^2 \leqq r^2\},$$

potom $K \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 K = \pi r^2$. Dokažte !

5,22. Buď $M = \{[x,y] \in E_2\ ;\ 0 \leqq x < y\}$. Potom $M \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 M = +\infty$.
Dokažte !

‖ Označíme-li (kreslete !)

$$K = \{[x,y] \in E_2\ ;\ 0 < x < y\},$$

$$N = \{[x,y] \in E_2 \ ; \quad x = 0,\ y \in (0, +\infty)\},$$

je N nulová množina v E_2 (viz př. 5,17), K otevřená v E_2, tedy $K \in \mathfrak{M}_2$ a z věty 13 vyplývá, že $M = K \cup N \in \mathfrak{M}_2$.
Podle věty 15 pak dostáváme $\mu_2 M = \mu_2 K$.
Označíme-li K_x průmět množiny K do osy x, je $K_x = (0,+\infty)$ a pro $x \in (0,+\infty)$ je $K^{x,*} = (x,+\infty)$.
Zřejmě $\mu_1 K^{x,*} = +\infty$ pro $x \in (0,+\infty)$, tedy $\mu_2 K = +\infty$.
V praxi postupujeme rychleji a rovnou píšeme

$$\mu_2 M = \mu_2 K = \iint_K 1 \, dxdy = \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} dy \right) dx = +\infty ,$$

anebo též - zaměníme-li pořadí integrace

$$\mu_2 M = \mu_2 K = \iint_K 1 \, dx\, dy = \int_0^{\infty} \left(\int_y^{\infty} dx \right) dy = +\infty .$$

Zkuste dokázat ještě jinak, že $\mu_2 M = +\infty$! ||

5,23. Definice:

V mnohých sbírkách příkladů i v mnohých učebnicích se setkáme s úlohami následujícího typu:

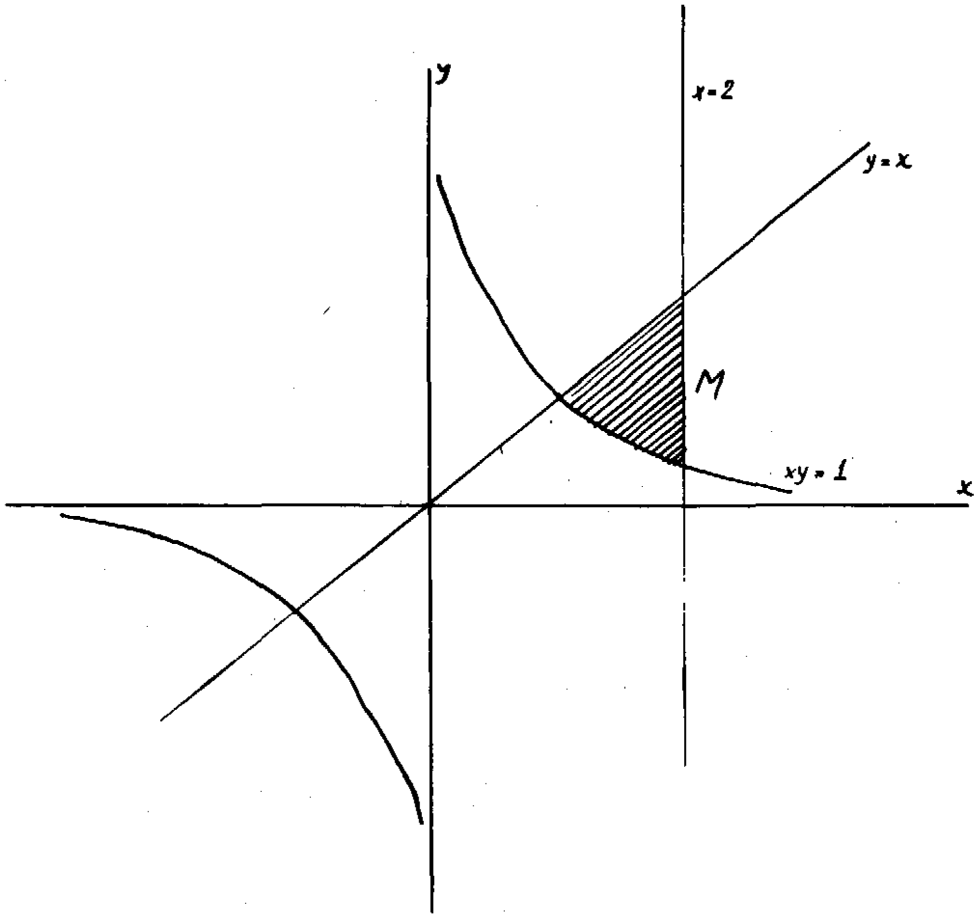
" množina M je v rovině omezená křivkami

$x = 2$, $y = x$, $xy = 1$, spočtěte $\mu_2 M$! "

Co se rozumí slovy "omezená křivkami" ? Toto jest nějaký pojem - který, i když je intuitivně zřejmý - by bylo zapotřebí definovat. Pokusme se nejdříve na našem příkladě ilustrovat, co by se mohlo tímto pojmem rozumět. Nakresleme si tedy "křivky" $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$ (viz obrázek č.6 na následující straně).
Množina $\{[x,y] \in E_2 \ ; \ x = 2\}$ je přímka a dělí nám rovinu E_2 na dvě poloroviny, označme je A_1, A_2. Rovněž tak "množina $y = x$" dělí rovinu na dvě poloroviny, které si označme B_1, B_2. Konečně třetí množina $\{[x,y] \in E_2 \ ; \ xy = 1\}$ jest rovnoosá hyperbola a i ta nám dělí rovinu na dvě - byť ne souvislé - množiny (tzv. vnitřek a vnějšek hyperboly) - označme je C_1, C_2.
Nyní utvoříme všechny možné průniky.

$$A_1 \cap B_1 \cap C_1 , \quad A_1 \cap B_2 \cap C_1 , \quad A_1 \cap B_2 \cap C_2 , \ \dots , \ A_2 \cap B_2 \cap C_2 .$$

Některé z těchto průniků jsou prázdné množiny, některé neomezené množiny a pouze jedna množina - jeden průnik - je omezená a neprázdná množina.
A této množině budeme zpravidla říkat, že je "omezená" danými křivkami".



Obrázek č. 6

Pokusme se nyní vyslovit obecnou definici:

Mějme dáno p funkcí dvou proměnných $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$.
Nechť každá funkce φ_i $(i = 1,2,\dots,p)$ je definována na množině $M_i \times N_i$, označme

$$K_i = \left\{[x,y] \in E_2 ;\quad x \in M_i ,\ y \in N_i ;\quad \varphi_i(x,y) = 0\right\},$$

$i = 1,2,\dots,p$, (K_i jsou tedy naše "křivky"). Označme dále

$$\hat{K}_i = \left\{[x,y] \in E_2 ;\quad x \in M_i ,\ y \in N_i ;\quad \varphi_i(x,y) > 0\right\},\quad i = 1,2,\dots,p,$$
$$\check{K}_i = \left\{[x,y] \in E_2 ;\quad x \in M_i ,\ y \in N_i ;\quad \varphi_i(x,y) < 0\right\},\quad i = 1,2,\dots,p.$$

Utvořme všechny možné průniky:

$$\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2 \cap \dots \cap \hat{K}_p ,\ \hat{K}_1 \cap \hat{K}_2 \cap \dots \cap \check{K}_p ,\ \dots, \check{K}_1 \cap \check{K}_2 \cap \dots \cap \check{K}_p$$

(precizujte!).

Potom pod pojmem "<u>množina omezená křivkami $K_1, K_2, \dots, K_p$</u> " rozumíme libovolný z těchto průniků, který je

a/ neprázdný,

b/ omezený v E_2 .

Je nutno si uvědomit, že

1/ taková "množina" vůbec nemusí existovat (uveďte příklad!) ,

2/ těchto "množin" může být i více (uveďte příklad!).

Obdobná definice se dá uvést i pro prostory vyšší dimense, bude-li se jednat o množiny v E_3 , budeme zpravidla říkat "<u>množina omezená plochami</u>".

5,24. Nechť $M \subset E_2$ je omezená křivkami $y = \frac{8}{4+x^2}$ a $y = \frac{x^2}{4}$. Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 2(\pi - \frac{2}{3})$.

1/ Nakreslete si příslušný obrázek, tj. množiny

$$K_1 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad y = \frac{8}{4+x^2}\right\},$$

$$K_2 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad 4y = x^2\right\}.$$

2/ Označme dále

$$\hat{K}_1 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad y < \frac{8}{4+x^2}\right\},$$

$$\check{K}_1 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad y > \frac{8}{4+x^2}\right\},$$

$$\hat{K}_2 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad 4y < x^2\right\},$$

$$\check{K}_2 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad 4y > x^2\right\}.$$

Ukážeme, že množina $\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2$ je neomezená v E_2 .
Zvolme posloupnost bodů $A_n = [n,0]$, potom

$$A_n \in \hat{K}_1 \text{ (proč?)}, \quad A_n \in \hat{K}_2 \text{ (proč?)} ,$$

tedy $A_n \in \hat{K}_1 \cap \hat{K}_2$ a odtud vyplývá, že množina $\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2$ nemůže být omezená (odůvodněte !).

3/ Obdobně ukažte, že množiny $\check{K}_1 \cap \check{K}_2$, $\check{K}_1 \cap \check{K}_2$ nejsou omezené v E_2 !

4/ Uvažujme množinu $\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2$, označme ji $\overset{\infty}{M}$, tedy

$$M = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad y < \frac{8}{4+x^2}\right\} \cap \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad 4y > x^2\right\} = \left\{[x,y] \in E_2 ; \; y < \frac{8}{4+x^2} \text{ a } 4y > x^2\right\} = \left\{[x,y] \in E_2 ; \; \frac{x^2}{4} < y < \frac{8}{4+x^2}\right\} .$$

Co bude průmětem M_x množiny M do osy x? - podle definice

$$M_x = \{ x \in E_1 \; ; \; \text{existuje } y \in E_1 \text{ takové, že } [x,y] \in M \}.$$

Zvolíme-li $x \in E_1$ tak, aby $\frac{x^2}{4} \geqq \frac{8}{4+x^2}$, neexistuje zřejmě žádná $y \in E_1$ taková, že $[x,y] \in M$. Naopak, bude-li pro nějaké $x \in E_1$ platit $\frac{x^2}{4} < \frac{8}{4+x^2}$, bude zřejmě $x \in M_x$ (proč?),

tedy

$$x \in M_x \iff \frac{x^2}{4} < \frac{8}{4+x^2} .$$

Řešením poslední nerovnosti dostáváme

$$x \in M_x \iff x \in (-2,+2) ,$$

tj. $M_x = (-2,2)$.

Nyní pro každé $x \in M_x$ jest

$$M^{x,*} = \{ y \in E_1 \; ; \; [x,y] \in M \} = \left(\frac{x^2}{4} \; ; \; \frac{8}{4+x^2} \right)$$

5/ Množina M je omezená v E_2, toto je ihned vidět z množin M_x a $M^{x,*}$, neboť

$$[x,y] \in M \implies |x| < 2 \, , \quad 0 \leqq \frac{x^2}{4} < y < \frac{8}{4+x^2} \leqq 2 ,$$

tedy $M \subset (-2,+2) \times \langle 0,2 \rangle$.

6/ Množina M je měřitelná v E_2, neboť je průnik množin $\hat{K}_1$, $\check{K}_2$, které jsou obě otevřené v E_2 (dokažte!).

7/ Můžeme použít Fubiniovu větu, dostáváme

$$\mu_2 M = \iint_M dx\,dy = \int_{-2}^{2} \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{8}{4+x^2}} dy \right) dx = 2 \left(\pi - \frac{2}{3} \right) .$$

V dalších příkladech budeme zpravidla postupovat rychleji, je však zapotřebí umět jednotlivé kroky - tak jako jsme to provedli v tomto příkladě - podrobně odůvodnit.

5,25. Množina M je omezená následujícími křivkami :

$$x = 2 \; ; \quad y = x \; ; \quad xy = 1; \quad x = 0$$

Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \frac{3}{2} - \log 2$. Dokažte !

1/ Nakreslete si příslušný obrázek !

2/ Ukažte, že

$$M = \left\{ [x,y] \in E_2 \; ; \; \frac{1}{x} < y < x \; ; \; x \in (1,2) \right\} ,$$

tedy $\mu_2 M = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} dy \right) dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2} - \log 2$.

3/ Zkusme integrovat v obráceném pořadí.

Buď M_y průmět množiny M do osy y ,

zřejmě $M_y = \left(\frac{1}{2} , 2 \right)$.

Pro $y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ je $M^{*,y} = \left(\frac{1}{y} , 2 \right)$,

pro $y \in \langle 1,2)$ je $M^{*,y} = (y,2)$,

pro ostatní y je $M^{*,y} = \emptyset$.

Použijeme-li nyní Fubiniovu větu, dostáváme

$$\mu_2 M = \int_{\frac{1}{2}}^{2} F(y)\, dy ,$$

kde $F(y) = 2 - \frac{1}{y}$ pro $y \in \left(\frac{1}{2} , 1 \right)$

$F(y) = 2 - y$ pro $y \in \langle 1,2)$.

Konečně tedy

$$\mu_2 M = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2 - \frac{1}{y}\right) dy + \int_1^2 (2 - y)\, dy = \frac{3}{2} - \log 2 .$$

4/ Opět můžeme postupovat rychleji, označíme-li si

$M_1 = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ \frac{1}{x} < y < 1 ,\ x \in (1,2) \right\}$,

$M_2 = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ y = 1 ,\ x \in (1,2) \right\}$,

$M_3 = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ 1 < y < x ,\ x \in (1,2) \right\}$,

jest množina M_2 nulová, množiny M_1 , M_2 otevřené,

$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Tedy $M \in \mathcal{M}_2$ a

$\mu_2 M = \mu_2 M_1 + \mu_2 M_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{y}}^{2} dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_y^2 dx \right) dy = \frac{3}{2} - \log 2$.

5,26. Buď $M = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ 1 \leq x \leq 5 ;\ y \leq 3 ,\ xy \geq 1 \right\}$

Spočtěte $\mu_2 M$!

1/ $M \in \mathcal{M}_2$ (proč?)

2/ $\mu_2 M = \iint_M dx\, dy = \int_1^5 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{3} dy \right) dx = \int_1^5 \left(3 - \frac{1}{x}\right) dx = 12 - \log 5$,

3/ $\mu_2 M = \iint_M dx\, dy = \int_{\frac{1}{5}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{y}}^{5} dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_1^5 dx \right) dy = 12 - \log 5$.

Velmi mnoho množin, s kterými se setkáme, bývá souměrných podle jedné či obou os. Při výpočtu měr takových množin či integrálů přes množiny tohoto typu může být pak užitečné se omezit jen na část těchto množin, např. jen na část ležící v prvním kvadrantu apod. Teoretickým základem je následující věta.

$\boxed{5{,}27^{\circ}.}$ a/ Buď $M \subset E_2$, $M \in \mathcal{M}_2$, nechť množina M je "souměrná" podle osy y, tj.

$$[x,y] \in M \iff [-x,y] \in M .$$

Označme

$$\widetilde{M} = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad [x,y] \in M , \quad x > 0 \} .$$

Potom $\widetilde{M} \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 2 \ \mu_2 \widetilde{M}$. Dokažte!

‖ Označíme-li

$$K = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad x > 0 \} ,$$

je $K \in \mathcal{M}_2$ a $\widetilde{M} = M \cap K$, tedy $\widetilde{M} \in \mathcal{M}_2$ (odůvodněte!)

Podle věty 59 lehko zjistíte, že

$$\mu_2 \widetilde{M} = \mu_2 (M - \widetilde{M}) ,$$

tedy $\mu_2 M = \mu_2 \widetilde{M} + \mu_2 (M - \widetilde{M}) = 2 \ \mu_2 \widetilde{M}$. ‖

b/ Dokažte obdobnou větu pro množiny souměrné podle osy x.

c/ Buď $M \subset E_2$ měřitelná množina souměrná podle obou os x i y. Označme

$$\approx{M} \ \widetilde{\widetilde{M}} = \{ [x,y] \in M ; \quad x > 0 , \quad y > 0 \}$$

Potom $\widetilde{\widetilde{M}} \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 4 \ \mu_2 \widetilde{\widetilde{M}}$. Dokažte!

d/ Vyslovte obdobné věty pro prostory vyšší dimense!

5,28. Buď $M = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad 1 \leq x^2 + y^2 < 4 \}$ (kreslete!) ,

$$M_1 = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} ,$$

$$M_2 = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad 1 < x^2 + y^2 < 4 \} .$$

Ukažte, že každá tato množina je měřitelná a

$$\mu_2 M = \mu_2 M_1 = \mu_2 M_2 = 3 \pi .$$

‖ 1/ Ukažte, že kterékoliv dvě z těchto množin se liší o nulovou množinu a že množina M_1 je uzavřená.

2/ Označme M_x průmět množiny M do osy x, zřejmě $M_x = (-2,+2)$ (dokažte podrobně!).

Dále platí implikace:

$$x \in (-\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty) \Rightarrow M^{x,*} = \emptyset$$

$$x \in (-2, -1 \rangle \cup \langle 1, 2) \Rightarrow M^{x,*} = (-\sqrt{4 - x^2} ; +\sqrt{4 - x^2}) ,$$

$$x \in (-1, +1) \Rightarrow M^{x,*} = (-\sqrt{4 - x^2} ; -\sqrt{1 - x^2}) \cup (\sqrt{1 - x^2} ; \sqrt{4 - x^2}) .$$

Tedy pro

$x \in (-2, -1\rangle \cup \langle 1,2)$ je $\mu_1 M^{x,*} = 2\sqrt{4-x^2}$,

$x \in (-1, +1)$ je $\mu_1 M^{x,*} = 2(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2})$.

Odtud podle Fubiniovy věty dostáváme

$$\mu_2 M = \int_{-2}^{-1} 2\sqrt{4-x^2}\,dx + \int_1^2 2\sqrt{4-x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} 2(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2})\,dx = $$
$$= 3\pi .$$

3/ Použijeme-li předchozího cvičení 5,27 a postupujeme-li rychleji, dostáváme

$$\mu_2 M = 4\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right)dx + 4 \cdot \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy\right)dx = 3\pi .$$

4/ Použijte též vztahu

$$M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 < 4\} - \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 < 1\}$$

cvičení 5,21 a větu 15 .‖

5,29. Buď $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 < y < x + 2\}$. Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \frac{9}{2}$. (Nakreslete si obrázek!).

1/ Ukažte, že množina M je otevřená v E_2 .

2/ Je-li $x^2 < x+2$, je $M^{x,*} = (x^2, x+2)$, pro ostatní x je $M^{x,*} = \emptyset$. Nerovnost $x^2 < x + 2$ je splněna, právě když $x \in (-1,+2)$, tedy

$$\mu_2 M = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \frac{9}{2} .$$

3/ Integrujeme-li v "obráceném" pořadí - proveďte podrobně - jest

$$\mu_2 M = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\right) dy + \int_1^4 \left(\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\right) dy = \frac{9}{2} .$$ ‖

5,30. Množina M bude v dalším vždy omezena křivkami (viz 5,23). Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$ a spočtěte $\mu_2 M$!

a/ M omezená křivkami:

$2x - y = 0$, $2x - y - 7 = 0$, $x - 4y + 7 = 0$, $x - 4y + 14 = 0$,

potom $\mu_2 M = 7$,

b/ M omezená:

$$x = \frac{y^2+b^2}{2b} ; \quad x = \frac{y^2+a^2}{2a} \quad (0 < b < a) ,$$

$\mu_2 M = \frac{2}{3}(a-b) \cdot \sqrt{ab}$, c/ M omezená: $y = -2$; $y = x + 2$; $y = 2$; $y^2 = x$ ($\mu_2 M = \frac{40}{3}$),

d/ M : $y = \frac{1}{a}(x-a)^2$, $x^2 + y^2 = a^2$; $a > 0$ ($\mu_2 M = \frac{a^2}{12}(3\pi - 4)$),

e/ M : $x^2 + y^2 = a^2$; $x + y = a$; $x \geq 0$, $y \geq \frac{a}{2} > 0$

($\mu_2 M = \frac{1}{6}\pi a^2 - \frac{a^2}{8}(1 + \sqrt{3})$) ,

f/ M : $y = 4 - x^2$; $3x - 2y - 6 = 0$ ($\mu_2 M = \frac{1331}{48}$) ,

g/ M : $xy = a^2$; $x^2 = ay$, $y = 2a$, $x \geq 0$, $a > 0$

($\mu_2 M = \frac{23}{24} a^2 + a^2 \log 2$) ,

h/ M : $x^2 + y^2 = a^2$; $y = \frac{a}{n}$, $a > 0$, $n > 1$

($\mu_2 M = \frac{a^2}{2}$ (arcsin $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2 - 1}$)) ,

i/ M : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a > 0$, $b > 0$

($\mu_2 M = \frac{1}{4} ab (\pi - 2)$) ,

j/ M : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; $y = x$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ ($\mu_2 M = 6 \arcsin \frac{4}{5}$),

k/ M : je omezená $x^2 + y^2 = 5$; $y = 0$; tečnou ke kružnici

$x^2 + y^2 = 5$ v bodě $[1,2]$ ($\mu_2 M = 5 - \frac{5}{2} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$) ,

l/ M : $xy = 3$; $x + y = 4$ ($\mu_2 M = 4 - \log 27$) ,

m/ M : $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $x = 0$, $y = 0$, $x = a$,

$a > 0$ ($\mu_2 M = \frac{a^2}{2}(e - e^{-1})$),

n/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 ;\ x > 2 ,\ 0 < y < \frac{1}{x^2}\right\}$ ($\mu_2 M = \frac{1}{2}$) ,

o/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 ;\ x > 2 ,\ 0 < y < \frac{1}{x}\right\}$ ($\mu_2 M = +\infty$) ,

p/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 ;\ 0 < y < \frac{1}{1+x^2}\right\}$ ($\mu_2 M = \pi$) ,

q/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 ;\ x > 1 ;\ 0 < y < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right\}$ ($\mu_2 M = +\infty$) ,

r/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 ;\ 0 < x < 9 ,\ 0 < y < \frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$ ($\mu_2 M = 6$) .

V dalším se budeme zabývat výpočty jednoduchých dvojných integrálů přes danou množinu M . Metody výpočtu jsou v podstatě stejné jako v předešlých cvičeních - obyčejně hledáme průmět množiny M do některé z os, příslušné řezy množiny M a aplikujeme Fubiniovu větu. Než však tuto větu použijeme, musíme vždy zjistit, zda daný dvojný integrál vůbec existuje.

5,31.° Buď $M \subset E_2$ měřitelná množina souměrná podle osy y, buď f funkce dvou proměnných na M "sudá" v proměnné x, tj.

$$f(-x, y) = f(x,y) \quad \text{kdykoliv} \quad [x,y] \in M .$$

Nechť dále $f \in \mathscr{L}_M^*$

Označme $\tilde{M} = \{ [x,y] \in M ; \quad x > 0 \}$.

Potom $f \in \mathscr{L}_{\tilde{M}}^*$ a

$$\int_M f = 2 \int_{\tilde{M}} f . \quad \text{Dokažte !}$$

Viz obdobné cvičení 5,27 .

Vyslovte věty analogické k větám ve cvičení 5,27 b) – d) .

5,32. Buď $M = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad |x| + |y| \leq 1 \}$ (nakreslete!).

Potom $\iint_M (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{2}{3}$. Dokažte !

1/ $M \in \mathfrak{M}_2$ (množina M je uzavřená v E_2) .

2/ Funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ je spojitá a nezáporná v M,

tedy $f \in \mathscr{L}_M^R$ (viz věty 48 a 33) .

Lze tedy užít Fubiniovu větu (viz též 5,13), použijeme-li předchozího cvičení 5,31 dostaneme (proveďte podrobně ! , nalezněte M_x a $M^{x,*}$).

$$\iint_M (x^2 + y^2)\, dx\, dy = 4 . \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx =$$

$$= 4 \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3} (1-x)^3 \right) dx = \frac{2}{3} .$$

3/ Zkuste též integrovat v obráceném pořadí .

5,33. Ukažte, že $\iint_M e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \frac{1}{2}$, kde

$$M = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad 0 \leq x \leq y \}$$

Množina M je uzavřená, integrovaná funkce spojitá a kladná na M, tedy

$$\iint_M e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty e^{-(x+y)}\, dy \right) dx = \int_0^\infty e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2} .$$

5,34. Spočtěte $\iint_M xy\, dx\, dy$, kde $M \subset E_2$ je množina omezená osami x a y a "křivkou" $\{ [x,y] \in E_2 ; \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \}$.
(viz definice 5,23).

Ukažte, že $M = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad 0 < y < 1 + x - 2\sqrt{x}$
$x \in (0,1) \}$ tedy (provádějte podrobně !)

25535 28

$$\iint_M xy\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} xy\,dy \Big)\,dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x\,(1-\sqrt{x})^4\,dx = \frac{1}{280} \,.$$

5,35. (Viz též cvičení 5,47).

Ukažte, že $\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi$, je-li $M = \{ [x,y] \in E_2 \,;\, x^2 + y^2 \leqq 1 \}$

Funkce f , $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ není definována všude v M , protože však množina $N = \{ [x,y] \in E_2 \,;\, x^2 + y^2 = 1 \}$ je nulová (viz cvičení 5,15), je funkce f definována skoro všude v M . Označíme-li $\tilde{M} = M - N$, je množina $\tilde{M}$ otevřená v E_2 , f spojitá a kladná v $\tilde{M}$ a

$$\int_M f = \int_{\tilde{M}} f \,,$$

tedy s použitím 5,31 dostáváme

$$\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 4 \,.\, \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \Big)\,dx =$$

$$= 4 \int_0^1 \Big(\Big[\arcsin \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \Big]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \Big)\,dx =$$

$$= 4 \int_0^1 \frac{\pi}{2}\,dx = 2\pi \,.$$

5,36. (Viz též cvičení 5,49).

Spočtěte $\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, kde $M = \{ [x,y] \in E_2 \,;\, x^2 + y^2 \leqq x \}$

Nakreslete si množinu M , je to vlastně "kruh" o středu $\left[\frac{1}{2} , 0 \right]$ a poloměru $\frac{1}{2}$. Opět funkce $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ není všude v M definována ($[0,0] \in M$). Označíme-li však $\tilde{M} = \{ [x,y] \in E_2 \,;\, x^2 + y^2 < x \}$, je $\tilde{M}$ otevřená v E_2 , funkce f spojitá a kladná v $\tilde{M}$ a $\int_M f = \int_{\tilde{M}} f$ (vše podrobně proveďte!) , tedy

$$\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{x-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Big)\,dx = 2 \,.$$

5,37. Ukažte, že $\iint_M x^2 y^{-2}\,dx\,dy = \frac{9}{4}$, je-li množina $M \subset E_2$ omezena křivkami $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$! (Kreslete!).

$$\iint_M x^2\, y^{-2}\, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} x^2 y^{-2}\, dy \right) dx = \frac{9}{4}\ , \text{ anebo též}$$

$$\iint_M x^2 y^{-2}\, dx\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{y}}^{2} x^2 y^{-2}\, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_y^2 x^2 y^{-2}\, dx \right) dy = \frac{9}{4}\ .$$

5,38. Dokazujte následující tvrzení:

a/ $\displaystyle\iint_M \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \log\frac{25}{24}$ pro $M = \langle 3,4\rangle \times \langle 1,2\rangle$

(tím rozumíme $M = \{[x,y] \in E_2\ ;\ x \in \langle 3,4\rangle\ ,\ y \in \langle 1,2\rangle\}$),

b/ $\displaystyle\iint_M \frac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{12}$ pro $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$,

c/ $\displaystyle\iint_M \frac{y\, dy\, dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \log\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ pro $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$,

d/ $\displaystyle\iint_M y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dx\, dy = \frac{32}{45} R^5$ pro $M = \{[x,y] \in E_2\ ;\ x^2 + y^2 \leqq R^2\ ;\ R > 0\}$,

e/ $\displaystyle\iint_M (x^2 + y)\, dx\, dy = \frac{33}{140}$, kde M je omezená křivkami

$y = x^2,\ y^2 = x$,

f/ $\displaystyle\iint_M \cos(x+y)\, dx\, dy = -2$, kde M je omezená křivkami

$x = 0\ ,\ y = x\ ,\ y = \pi$,

g/ $\displaystyle\iint_M (2x + y)\, dx\, dy = \frac{27}{2}$, kde M je omezená křivkami

$x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ x + y = 3$,

h/ $\displaystyle\iint_M \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \frac{\pi}{3}\right)$, kde M je omezená křivkami

$y = 0\ ,\ x = 1\ ,\ y = x$,

i/ $\displaystyle\iint_M xy\, dx\, dy = \frac{1}{24}$ pro $M = \{[x,y] \in E_2\ ;\ x^2 \leqq y \leqq x\ ,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$,

j/ $\displaystyle\iint_M (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{1}{3}$ pro M omezenou křivkami

$y = 0\ ,\ y = 1-x,\ y = 1+x$,

k/ $\displaystyle\iint_M (x^3 + y^3)\, dx\, dy = \frac{752}{5}$ pro M omezenou křivkami

$y = \frac{x}{2}\ ,\ y = x\ ,\ x = 4$,

l/ $\displaystyle\iint_M (x^2 + y)\, dx\, dy = \frac{13}{3}$ pro M omezenou křivkami

$x = 0\ ,\ y = \frac{3}{2}x\ ;\ y = 4-(x-1)^2 (x \geqq 0)$.

5,39. Buď $M = \{[x,y,z] \in E_3 \; ; \; x \geqq 0 \, , \; y \geqq 0 \, , \; 0 \leqq z \leqq 1-x-y \}$.
Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_3$ a $\mu_3 M = \frac{1}{6}$!

Nakreslete si množinu M - je to čtyřstěn s vrcholy $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, podle středoškolské látky je "objem M" roven $\frac{1}{3}$ z.v, kde z je plocha základny a v délka výšky. V našem případě je $z = \frac{1}{2}$, $v = 1$, tedy vol $M = \frac{1}{6}$.

A/ M je množina uzavřená v E_3 (ukažte!), tedy $M \in \mathcal{M}_3$.

B/ Ukážeme, že $\mu_3 M = \frac{1}{6}$. Zde můžeme postupovat podle Fubiniovy věty v podstatě dvěma způsoby, ukážeme oba dva.

(I) Označme $M_{x,y}$ průmět množiny M do "roviny xy" , tj. $M_{x,y} = \{[x,y] \in E_2 \; ; \text{ existuje } z \in E_1 \text{ , pro něž } [x,y,z] \in M \}$.

Dokážeme, že

$$M_{x,y} = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \geqq 0 \, , \; 0 \leqq y \leqq 1-x \}$$

(tj. M_{xy} je trojúhelník s vrcholy $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$), důkaz tohoto tvrzení proveďme podrobně:

a/ zvolme $[x,y] \in M_{x,y} \Rightarrow$ existuje $z \in E_1$ tak, že $[x,y,z] \in M$, tj. platí $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $0 \leqq z \leqq 1-x-y$.
Odtud plyne, že pro náš bod $[x,y] \in M_{x,y}$ platí $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $0 \leqq 1-x-y$, tedy $[x,y] \in \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \geqq 0 \, , \; 0 \leqq y \leqq 1-x \}$.
Tím jsme ukázali, že $M_{x,y} \subset \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \geqq 0 \, , \; 0 \leqq y \leqq 1-x \}$.

b/ Zvolme bod $[x,y] \in \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \geqq 0 \, , \; 0 \leqq y \leqq 1-x \}$, tj. zvolíme takový bod $[x,y]$, že je splněno $x \geqq 0$, $0 \leqq y \leqq 1-x$.
Potom určitě existuje $z_0 \in E_1$ - například $z_0 = 0$ - pro něž platí

$$x \geqq 0 \, , \quad y \geqq 0 \, , \quad 0 \leqq z_0 \leqq 1-x-y \, ,$$

tj. existuje takové $z_0 \in E_1$, že $[x,y,z_0] \in M$. Odtud plyne, že $[x,y] \in M_{x,y}$.

Tím jsme dokázali obrácenou inklusi a jsme hotovi.

Nyní pro libovolné $[x,y] \in M_{x,y}$ je

$$M^{x,y,*} = \{ z \in E_1 \; ; \; [x,y,z] \in M \} = \{ z \in E_1 \; ; \; 0 \leqq z \leqq 1-x-y \} = \langle 0, 1-x-y \rangle \, ,$$

tedy $\mu_1 M^{x,y,*} = 1-x-y$ (délka intervalu !) .

Fubiniova věta konečně dává

$$\mu_3 M = \iiint_M dx\,dy\,dz = \iint_{M_{x,y}} \mu_1 M^{x,y,*} \, dx\,dy = \iint_{M_{x,y}} (1-x-y)\,dx\,dy \, .$$

Poslední integrál spočítáme již známým způsobem (opětným použitím Fubiniovy věty, tentokráte však již pro dvojrozměrný integrál funkce $1-x-y$ přes množinu $M_{x,y}$).

Dostáváme

$$\iint_{M_{x,y}} (1 - x - y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy \right) dy = \frac{1}{6} .$$

V praxi počítáme rychleji a přímo píšeme

$$\mu_3 M = \iiint_M dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx ,$$

kde si pochopitelně předem spočítáme "příslušné" meze. Zkuste míru množiny M spočítat ve všech jiných pořadích integrace ! (např. nejdříve integrovat podle x, pak podle z a nakonec podle y).

(II) Označme tentokrát M_z průmět množiny M do "osy z", tj.

$M_z = \{ z \in E_1 ;$ existuje $[x,y] \in E_2$ pro něž $[x,y,z] \in M \}$.

Opět podrobně ukážeme, že $M_z = \langle 0,1 \rangle$ - k tomu je nutné a stačí ukázat, že jednak $M_z \subset \langle 0,1 \rangle$ a jednak $\langle 0,1 \rangle \subset M_z$.

a/ Buď tedy $z \in M_z$, tj. existuje dvojice $[x,y]$ taková, že $[x,y,z] \in M$, tj. taková dvojice $[x,y]$, pro niž platí $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1 - x - y$.

Odtud je lehko vidět, že $0 \leq z \leq 1$, tedy $z \in \langle 0,1 \rangle$.

b/ Buď naopak $z \in \langle 0,1 \rangle$, máme ukázat, že existuje bod $[x,y]$, pro nějž $[x,y,z] \in M$.

Položme např. $x_0 = \frac{1-z}{3}$, $y_0 = \frac{1-z}{3}$ (kreslete !)

potom $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$, $0 \leq z \leq 1 - x_0 - y_0$ (ukažte!), tj. bod $[x_0 , y_0 , z] \in M$, tedy $z \in M_z$.

Fubiniova věta nám nyní dává

$$\mu_3 M = \int_{M_z} \left(\int_{M^{*,z}} dx\, dy \right) dz = \int_0^1 \mu_2 M^{*,z}\, dz ,$$

kde $M^{*,z} = \{ [x,y] \in E_2 ; [x,y,z] \in M \}$.

Stačí tedy spočítat $\mu_2 M^{*,z}$ pro $z \in M_z$ - tuto úlohu však již umíme v rovině řešit.

Je lehko vidět, že (opět podrobně ukažte!)

$$M^{*,z} = \{ [x,y] \in E_2 ; x \geq 0 , y \geq 0 , x + y \leq 1 - z \},$$

Což neznamená nic jiného, než že $M^{*,z}$ je pro $z \in \langle 0,1 \rangle$ rovnostranný a pravoúhlý trojúhelník s délkou odvěsny $1-z$, tedy

$$\mu_2 M^{*,z} = \frac{1}{2} (1 - z)^2 .$$

(Zde se nám podařilo přímo spočítat míru množiny $M^{*,z}$ z jejích geometrických vlastností - jako cvičení zkuste spočítat $\mu_2 M^{*,z}$ pomocí Fubiniovy věty tak, jako jsme to udělali v minulých cvičeních).

Konečně tedy $\mu_3 M = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z)^2 \, dz = \frac{1}{6}$

Opět zkuste volit jiné pořadí integrace ! ⌋

Tímto příkladem jsme se úmyslně zabývali velmi podrobně, znovu si jej pečlivě projděte a hlavně si uvědomte rozdíl mezi oběma metodami I a II . V dalších příkladech, jejichž návody již nebudou tak detailní, se snažte opět vše sami podrobně odůvodnit!

5,40. Spočtěte objem tělesa $T \subset E_3$, omezeného plochami $z = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$.
(Viz definice 5,23) .

⌈ 1/ Označme

$$M_1 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z > 1\},$$

$$M_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z < 1\},$$

$$N_1 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z^2 > x^2 + y^2\},$$

$$N_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z^2 < x^2 + y^2\}.$$

Pro názornost si plochy $z = 1$ (rovina) a $z^2 = x^2 + y^2$ (kuželová plocha) nakreslete !

Ukážeme, že množina $M_1 \cap N_1$ je neomezená - zvolme tedy posloupnost bodů $A_n = [0,0,n]$, $n = 2,3,4 \ldots$

Zřejmě $A_n \in M_1 \cap N_1$ (proč?) pro každé n , odtud plyne tvrzení (odůvodněte!).

Obdobně ukažte, že množiny $M_1 \cap N_2$, $M_2 \cap N_2$ jsou neomezené.

Množina $M_2 \cap N_1$ je omezená

$$\left([x,y,z] \in M_2 \cap N_1 \Rightarrow |x| \leq 1 , |y| \leq 1 , |z| \leq 1\right),$$

tedy $T = M_2 \cap N_1$.

2/ Z minulého vyplývá, že

$$T = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\},$$

odtud lehko ukážete, že T je otevřená množina v E_3 , tedy $T \in \mathcal{M}_3$.

3/ Lehko zjistíte, že T je kužel s vrcholem v bodě $[0,0,0]$ a základnou v rovině $z = 1$, poloměr základny je 1, podle známých vzorců je "objem T" roven $\frac{1}{3}\pi$.

4/ Spočítáme T podle obou metod (viz předchozí cvičení):

(I) označíme-li $T_{x,y}$ průmět T do roviny x,y,

jest

$$T_{x,y} = \left\{ [x,y] \in E_2 \; ; \quad x^2 + y^2 < 1 \right\},$$

a pro $[x,y] \in T_{x,y}$ jest

$$T^{x,y,*} = \left\{ z \in E_1 \; ; \quad \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1 \right\} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 1\right)$$

tedy

$$\mu_3 T = \iiint_T dx\, dy\, dz = \iint_{T_{x,y}} \left(\int_{T^{x,y,*}} dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_{T_{x,y}} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx\, dy = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) . dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\pi .$$

Opět můžeme krátce psát

$$\mu_3 T = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz \right) dy \right) dx$$

anebo též

$$\mu_3 T = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz$$

a podobně.

(II) Označíme-li T_z průmět T do osy z, jest $T_z = (0,1)$ a pro $z \in (0,1)$ jest

$$T^{*,z} = \left\{ [x,y] \in E_2 \; ; \quad x^2 + y^2 \leq z^2 \right\},$$

tedy $\mu_2 T^{*,z} = \pi z^2$ (viz př. 5,21),

odtud podle Fubiniovy věty dostáváme

$$\mu_3 T = \int_{T_z} \left(\int_{T^{*,z}} dx dy \right) dz = \int_0^1 \pi z^2 \, dz = \frac{\pi}{3} .$$

Opět zkuste volit jiné postupy integrace. ∎

Z uvedených příkladů je vidět, že snadnost výpočtu velmi závisí na tom, jaké pořadí integrace a jakou metodu zvolíme. Jest určitá věc cviku a šikovnosti, abychom výsledek obdrželi co nejjednodušší cestou. Uveďme následující příklad.

5,41. Buď $R > 0$, označme $M = \{ [x,y,z] \in E_2 \,;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 ,$
$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz \}$.
Potom $\iiint_M z^2 dxdydz = \frac{59}{480} \pi R^5$. Dokažte !

1/ Ukažte, že množina M je uzavřená v E_3 a funkce f, $f(x,y,z) = z^2$, je spojitá a nezáporná na M.
Lze použít Fubiniovu větu (jak vypadá množina M ?).

2/ (I) Buď $M_{x,y}$ průmět množiny M do roviny x,y, ukažte, že

$$M_{x,y} = \{ [x,y] \in E_2 \,;\ x^2 + y^2 \leq \tfrac{3}{4} R^2 \} .$$

Pro $[x,y] \in M_{x,y}$ je

$$M^{x,y,*} = \langle R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \,;\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \rangle$$

(vše podrobně zdůvodněte!), tedy

$$\iiint_M z^2 \cdot dx\, dy\, dz = \iint_{M_{x,y}} \Big(\int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2\, dz \Big)\, dx\, dy$$

a vidíme, že jsme se dostali k velmi nepříjemným integracím.

(II) Označíme-li M_z průmět množiny M do osy z, jest

$$M_z = \langle 0, R \rangle .$$

Dále pro

$z \in (0, \frac{R}{2} \rangle$ je $M^{*,z} = \{ [x,y] \in E_2 \,;\ x^2 + y^2 \leq 2Rz - z^2 \}$,
$z \in (\frac{R}{2}, R)$ je $M^{*,z} = \{ [x,y] \in E_2 \,;\ x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2 \}$,

tedy $\mu_2 M^{*,z} = \pi (2Rz - z^2)$ pro $z \in (0, \frac{R}{2} \rangle$,
$\mu_2 M^{*,z} = \pi (R^2 - z^2)$ pro $z \in (\frac{R}{2}, R)$

a Fubiniova věta dává

$$\iiint_M z^2 dxdydz = \int_0^R \Big(\int_{M^{*,z}} z^2 dx\, dy \Big)\, dz = \int_0^R z^2 \mu_2 M^{*,z}\, dz =$$
$$= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \pi (2Rz - z^2)\, dz + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 \pi (R^2 - z^2)\, dz =$$
$$= \frac{59}{480} \pi R^5 .$$

$\boxed{5,42.}$ **Dokažte následující tvrzení:**

a/ Těle$s$a $T \subset E_3$ je omezeno plochami $x = 0, y = 0, z = 0$, $x + 2y = 1$, $z = x^2 + y + 1$, potom $\mu_3 T = \frac{1}{3}$,

b/ Množina $T \subset E_3$ je omezena $y = 1$, $z = 0$, $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, potom $\mu_3 T = \frac{88}{105}$,

c/ T je omezeno $y = 0$, $z = 0$, $y = \frac{b}{a} x$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$, potom $\mu_3 T = \frac{1}{3} abc$,

d/ T je omezeno $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = xy$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$, potom $\mu_3 T = \frac{1}{8} R^4$,

e/ T je omezeno $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x-y+5$, $\mu_3 T = \pi 10$,

f/ T je omezeno $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$ $(a > 0, r > 0)$,

$$\Rightarrow \mu_3 T = \frac{\pi r^4}{4a}$$

$\overset{*}{g}$/ T je omezeno $x^2 + y^2 = 2ax$, $y^2 + z^2 = 4ax$ $(a > 0)$, $\mu_3 T = a^3 \left(2\pi + \frac{16}{3} \right)$,

$\overset{*}{h}$/ T je omezeno $x^2 + y^2 = Rx$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$, množině T se někdy říká Vivianiho okénko), $\mu_3 T = \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$,

i/ T je omezeno $z = 0$, $x^2 + z^2 = R^2$, $y = 0$, $y = 3$ $(z > 0, R > 0)$,

$$\mu_3 T = \frac{3}{2} \pi R^2 ,$$

j/ T je omezeno $z = 0$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 2$, $y = 3$,

$$z = xy \Rightarrow \mu_3 T = 10 ,$$

k/ T je omezeno $az = x^2 + y^2$, $z = a$ $(a > 0) \Rightarrow \mu_3 T = \frac{\pi a^3}{2}$,

l/ T je omezeno plochou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ a dále

1/ plochou $z = \lambda x + \mu y + h$ $(h > 0) \Rightarrow \mu_3 T = \pi ab\, h$,

2/ plochou $2z = x^2 + y^2 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{\pi}{8} ab\, (a^2 + b^2)$,

3/ plochou $z = xy \Rightarrow \mu_3 T = \frac{1}{2} a^2 b^2$,

m/ $T = \left\{ [x,y,z] \in E_3 ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \ \ a,b,c \text{ kladná} \right\} \Rightarrow \mu_3 T = \frac{4}{3} \pi\, abc$, n/ T je omezeno $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$,

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = 45$,

o/ T je omezeno $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $y = b$, a,b,c kladná $\Longrightarrow \mu_3 T =$

$= \frac{1}{2} \pi ab^2c$,

p/ T je omezeno $3x - 2y = 0$, $8x - y = 0$, $2y + 3y - 13 = 0$,

$2x + 3y - 26 = 0$, $17x + 6y - 13z = 0$, $z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{1183}{24}$,

q/ T je omezeno $6x - 9y + 5z = 0$, $3x - 2y = 0$, $4x - y = 0$,

$x + y - 5 = 0$, $z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{15}{2}$,

r/ T je omezeno $2x + y - 2 = 0$, $4x + 3y - 2z = 0$, $x = 0$, $y = 0$,

$z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{5}{3}$,

s/ T je omezeno $z = 4 - x^2$; $y = 5$, $y = 0$, $z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{160}{3}$,

t/ T je omezeno $z = a^2 - x^2$, $x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$,

$y = 2x$; $\mu_3 T = \frac{41}{162} a^4$,

u/ T je omezeno $z = a^2 - x^2$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $y = 0$,

$x = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{3}{16} \pi a^4$.

5,43. Dokažte následující tvrzení:

a/ $\iiint\limits_M z \, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{4} abc^2$ pro $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 , \ z \geqq 0 \right\}$,

b/ $\iiint\limits_M \frac{dx\, dy\, dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2} (\log 2 - \frac{5}{8})$, je-li množina M omezena plochami

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$,

c/ $\iiint\limits_M z \, dx\, dy\, dz = \frac{1}{4} \pi R^2h^2$, je-li M omezena $z^2 = \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2)$,

$z = h$,

d/ $\iiint\limits_M x \, dx\, dy\, dz = 4$, je-li M omezena $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$y = 3$, $x + z = 2$,

e/ $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{15} abc\, (a^2 + b^2 + c^2)$, je-li

$M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\}$

⟦ Stačí počítat pouze $\iiint_M x^2\,dx\,dy\,dz$, pak využijte symetrie ! ⟧

f/ $\iiint_M x\,dx\,dy\,dz = \frac{27}{4}$, je-li M omezena $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 2y + z - 6 = 0$,

g/ $\iiint_M xyz\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{96}$, je-li M omezena $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

5,44. Buď $M = \{[x,y] \in E_2 \,;\; x^2 + y^2 \leq 6\}$. Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 6\pi$. Dokažte ! (Viz též př. 5,20).

⟦ 1/ Označme

$$N = \{[x,y] \in E_2 \,;\; y = 0 \,,\; x \in (-\infty, 0\rangle\},$$

$$H(M) = \{[x,y] \in E_2 \,;\; x^2 + y^2 = 6\} ,$$

$$K = M - (N \cup H(M)) .$$

Ukažte, že množina $N \cup H(M)$ je nulová, $K \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \mu_2 K$.

2/ Buď dále

$$L = \{[r,\varphi] \in E_2 \,;\; r \in (0, \sqrt{6}),\; \varphi \in (-\pi, \pi)\}$$

a definujme zobrazení F množiny $L \subset E_2$ do E_2 předpisem

$$F(r, \varphi) = [x,y] \Leftrightarrow x = r\cos\varphi \,, \quad y = r\sin\varphi \,.$$

(zavádíme tzv. polární souřadnice).

Ukažte, že

(A) $\underline{F(L) = K}$ - k tomu je nutné a stačí ukázat, že jednak $F(L) \subset K$ a jednak $K \subset F(L)$.

a/ $F(L) \subset K$: zvolme libovolné $[x,y] \in F(L) \Rightarrow$ existuje $[r,\varphi] \in L$ tak, že $F(r,\varphi) = [x,y] \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 < 6 \Rightarrow [x,y] \in K \cup N$ a ukažte, že nemůže být $[x,y] \in N$,

b/ $K \subset F(L)$: zvolme $[x,y] \in K$ a položme

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \,, \quad \varphi = \operatorname{sign} y \,.\, \arccos \frac{x}{r} \,.$$

Musíme ukázat, že

1/ $[r,\varphi] \in L$

2/ $F(r,\varphi) = [x,y]$.

(B) F je prosté na množině L :

vezměte tedy $[r_1, \varphi_1] \in L$, $[r_2, \varphi_2] \in L$ takové, že $F(r_1, \varphi_1) = F(r_2, \varphi_2)$ a dokažte, že $[r_1, \varphi_1] = [r_2, \varphi_2]$.

(C) F je regulární na množině L (viz definici za větou 58):

k tomu musíme dokázat, že

1/ L je otevřená

2/ F má spojité parciální derivace na L,

3/ $D_F(r, \varphi) \neq 0$ pro $[r, \varphi] \in L$

(vyjde $D_F(r, \varphi) = r$).

Použijeme-li nyní větu 59 o substituci (ověřte předpoklady!) dostáváme

$$\mu_2 M = \mu_2 K = \iint_K dx\,dy = \iint_L r\,dr\,d\varphi ,$$

použijeme-li na poslední integrál Fubiniovu větu, je konečně

$$\mu_2 M = \iint_L r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\sqrt{6}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} r\,d\varphi \right) dr = 6\pi \quad .\|$$

$\boxed{5{,}45.}$ (Polární souřadnice v rovině).

Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 předpisem:

$$F(r, \varphi) = [x, y] \Leftrightarrow x = r\cos\varphi , \quad y = r\sin\varphi .$$

Dokažte, že

1/ F je regulární v každé otevřené množině M takové, že

$$M \subset E_2 - \{[r, \varphi] \in E_2 ; \quad r = 0 \ ,\}$$

2/ nechť $P \subset E_2$ je taková množina, že

$$[r, \varphi] \in P \Rightarrow r > 0 , \quad \varphi \in (-\pi, +\pi)$$

(respektive obecněji: existuje takové $\alpha \in E_1$, že

$$[r, \varphi] \in P \Rightarrow r > 0 , \quad \varphi \in (\alpha ; \alpha + 2\pi)),$$

potom zobrazení F je prosté v množině P.

‖ Viz návody ve cvičení 5,44 .‖

5,46. Buď $M = \{[x,y] \in E_2 ; \ 1 \leqq x^2 + y^2 < 4\}$. Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 3\pi$. Dokažte! (Viz též př. 5,28).

1/ Položte

$$K = M - (\{[x,y] \in E_2 ; \quad x^2 + y^2 = 1\} \cup \{[x,y] \in E_2 ;$$

$y = 0 \, , \; x \in (-\infty \, , 0 \rangle \} \;)$

a ukažte, že $K \in \mathcal{M}_2$, $\mu_2 K = \mu_2 M$.

2/ Zaveďte "polární souřadnice", označte

$$L = \{ [r, \varphi] \in E_2 \; ; \quad r \in (1,2), \; \varphi \in (-\pi, \pi \;) \}$$

a ukažte, že

A/ $F(L) = K$,

B/ F je regulární a prosté v množině L ,

tedy

$$\mu_2 K = \iint_K dx \, dy = \iint_L r \, dr \, d\varphi = \int_1^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} r \, d\varphi \right) \, dr = 3\pi$$

5,47. Ukažte, že $\displaystyle\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi$, je-li $M = \{ [x,y] \in E_2 \; ; \; x^2 + y^2 \leqq 1 \}$.

(Viz též př. 5,35).

Označme opět

$K = M - \{ [x,y] \in E_2 \; ; \quad x^2 + y^2 = 1 \} \cup \{ [x,y] \in E_2 \; ; \quad y = 0 \, ,$
$x \in \langle 0, +\infty \;) \}$,

buď $L = \{ [r, \varphi] \in E_2 \; ; \; r \in (0,1), \; \varphi \in (0, 2\pi) \}$,

buď F zobrazení z př. 5,45 (polární souřadnice).

Ukažte, že

A/ $F(L) = K$ (tj. ukažte, že $F(L) \subset K$ a $K \subset F(L)$) ,

B/ F je regulární a prosté v L ,

C/ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \in \mathcal{L}^R_K$.

Lze tedy použít větu o substituci a Fubiniovu větu, dostáváme

$$\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \iint_K \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \iint_L \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{1-r^2}} = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{rd\varphi}{\sqrt{1-r^2}} \right) dr = 2\pi$$

5,48. **Poznámka:**

1/ V příkladech 5,44 - 5,47 jsme se snažili ukázat na jednoduchou aplikaci věty 59 o substituci. Bylo též vidět - ve srovnání s větou o substituci pro jednorozměrné integrály - že ve vícerozměrných příkladech, je-li dána množina M a zobrazení F , bude hlavním problémem najít množinu L tak, aby $F(L) = M$. V tom bude spočívat také hlavní obtíž následujících příkladů,

2/ Jako cvičení se pokuste porovnat větu 71 (substituce pro Newtonovy integrály) a větu 59 (substituce pro Lebesgueovy integrály) pro jednorozměrný případ.

5,49. Ukažte, že $\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$ pro $M = \{[x,y] \in E_2 ; x^2 + y^2 \leq x\}$

(Viz též př.5,36).

Označme $K = M - \{[x,y] \in E_2 ; x^2 + y^2 = x\}$. Zřejmě $K \in \mathcal{M}_2$. Zaveďme zobrazení F dané polárními souřadnicemi (př. 5,45). Z podmínky $0 < x^2 + y^2 < x$ dostáváme podmínku $0 < r^2 < r \cdot \cos \varphi$, odkud plyne, že jednak $0 < r < \cos \varphi$ a jednak $\cos \varphi > 0$. Označíme-li $L = \{[r,\varphi] \in E_2 ; 0 < r < \cos \varphi , \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ je

A/ $F(L) = K$,

B/ F regulární a prosté v L,

C/ $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathcal{L}^R_K$,

tedy

$$\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_K \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_L \frac{rdrd\varphi}{r} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\varphi} dr \right) d\varphi = 2 .$$

Vše proveďte podrobně!

5,50. Buď $a > 0$, $M = \{[x,y] \in E_2 ; (x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2(x^2-y^2)\}$. Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 2a^2$. Dokažte!

1/ Křivka $N = \{[x,y] \in E_2 ; (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2-y^2)\}$ se nazývá lemniskata, máme tedy vlastně spočítat "plochu" množiny, omezené lemniskatou. Ukažte, že množina N je nulová (věta 62 či cvičení 5,103).

2/ Vzhledem k symetrii (cvičení 5,27) a k předchozímu je

$$\mu_2 M = 4 \mu_2 K ,$$

kde $K = \{[x,y] \in E_2 ; (x^2 + y^2)^2 < 2a^2(x^2 - y^2) , x > 0 , y > 0\}$.

Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 takto:

$$F(r, \varphi), = [x,y] \iff x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

(polární souřadnice). Musíme nalézt množinu $L \subset E_2$ tak, aby $F(L) = K$.

Z podmínky

$$[x,y] \in K \iff x > 0, \; y > 0, \; (x^2+y^2)^2 < 2a^2(x^2-y^2)$$

dostáváme

$$r^4 < 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \quad \cos\varphi > 0, \quad \sin\varphi > 0$$

Odtud plyne, žé

$$0 < r^2 < 2a^2\cos 2\varphi \text{ (tedy speciálně } \cos 2\varphi > 0\text{)} \quad r > 0,$$
$$\cos\varphi > 0, \; \sin\varphi > 0.$$

Označíme-li

$$L = \left\{[r,\varphi] \in E_2 ; \; 0 < r < \sqrt{2a^2\cos 2\varphi}, \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{4})\right\},$$

je

A/ $F(L) = K$,

B/ F regulární a prosté v L.

Dostáváme

$$\mu_2 M = 4\mu_2 K = 4\iint_K dx\,dy = 4.\iint_L r\,dr\,d\varphi =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr\right)d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi = 2a^2$$

Pokuste se nakreslit lemniskatu! ‖

5,51. Buď $a > 0$, $M = \left\{[x,y] \in E_2 ; \; (x^2+y^2)^3 < a^2(x^4+y^4)\right\}$, potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \frac{3}{4}\pi a^2$. Dokažte !
(Pokuste se nakreslit množinu M).

‖ 1/ Množina M je otevřená v E_2,

2/ Označme

$$K = \left\{[x,y] \in E_2 ; \; x > 0, \; y > 0\right\}.$$

Zaveďme zobrazení F (polární souřadnice) a nechť

$$L = \left\{[r,\varphi] \in E_2 ; \; 0 < r < a\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}, \; \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{2})\right\}.$$

Potom:

A/ $F(L) = K$

B/ F je regulární a prosté v L,

tedy

$$\mu_2 M = 4 \cdot \mu_2 K = 4 \iint_L r \, dr \, d\varphi = \frac{3}{4} \pi a^2 \quad \|$$

$\boxed{5,52.}$ Definujme zobrazení F množiny $L = \{[r,\varphi] \in E_2 \,;\; r > 0 \,,\; \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})\}$ do E_2 předpisem :

$$F(r,\varphi) = [x,y] \iff x = r \cdot \cos^2 \varphi \,,\quad y = r \sin^2 \varphi \,.$$

Buď $M = \{[x,y] \in E_2 \,;\; x > 0 \,,\; y > 0\}$.

Ukažte, že

1/ $F(L) = M$

2/ F je prosté v L ,

3/ F je regulární v každé otevřené množině $L_1 \subset L$.

‖ 1/ Zřejmě $F(L) \subset M$. Pro $[x,y] \in M$ položte

$$r = x + y \,,\quad \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{x}} \,,$$

potom $[r,\varphi] \in L$ a $F(r,\varphi) = [x,y]$.

2/ Další je snadné.

Zapamatujte si pouze, že Jacobiův determinant zobrazení F

$D_F(r,\varphi) = r \cdot \sin 2\varphi$. ‖

$\boxed{5,53.}$ Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 jako v př. 5,52 ,

$$F(r,\varphi) = [x,y] \iff x = r \cos^2 \varphi \,,\quad y = r \sin^2 \varphi \,.$$

Označme $L' = \{[r,\varphi] \in E_2 \,;\; r \in (0,+\infty) \,,\; \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)\}$,

$$M = \{[x,y] \in E_2 \,;\; x > 0 \,,\; y > 0\} .$$

Potom:

A/ $F(L') = M$

B/ F je prosté v L'

C/ F je regulární v L'.

Dokažte!

5,54. Buď $a > 0$, $M = \{[x,y] \in E_2 \,;\; (x+y)^4 < a x^2 y \,,\; x > 0\}$.
Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \frac{a^2}{210}$.

‖ 1/ M je otevřená a zřejmě $y > 0$ pro libovolný bod $[x,y] \in M$.

2/ Zaveďme zobrazení jako v př. 5,52, pro r, φ dostáváme následující podmínky:

$$r \cos^2 \varphi > 0 \,,\quad r \sin^2 \varphi > 0 \,,\quad r^4 < a r^3 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi \,,$$

z těchto podmínek vyplývá, že (omezíme-li se na $\varphi \in (0,2\pi)$)

$$\varphi \in (0, 2\pi) , \quad r < a \cos^4 \varphi \quad \sin^2 \varphi .$$

Kdybychom tedy označili např.

$$L' = \left\{ [r,\varphi] \in E_2 ; \; \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \pi) , \; 0 < r < a \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi \right\} ,$$

bylo by sice $F(L') = M$, ale zobrazení F by nebylo prosté v L'(viz př. 5,52 a 5,53 - rozmyslete!).

Položme proto např.

$$L = \left\{ [r,\varphi] \in E_2 ; \; \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{2}) , \; 0 < r < a\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi \right\},$$

potom

A/ $F(L) = M$,

B/ F je regulární a prosté v L (viz 5,52),

tedy

$$\mu_2 M = \iint_M dx\,dy = \iint_L 2\, r \sin \varphi \cos \varphi \; dr\, d\varphi =$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos^4\varphi \sin^2\varphi} r \sin \varphi \cos \varphi \; dr \right) d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 \varphi \sin^5 \varphi \, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{210} .$$

Co by se stalo, kdybychom položili

$$L = \left\{ [r,\varphi] \in E_2 ; \; \varphi \in (\tfrac{\pi}{2}, \pi) , \; 0 < r < a \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi \right\} \; ? \;\|$$

5,55. Buď $a > 0$, $M = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \; (x + y)^4 < a x^2 y , \; x < 0 \right\}$
Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$, $\mu_2 M = +\infty$! (Nakreslete M !).

‖ Použijte zobrazení F z E_2 do E_2 daného předpisem

$$F(r,\varphi) = [x,y] \Leftrightarrow x = - r \cos^2 \varphi \; , \; y = r \sin^2 \varphi \; . \|$$

5,56. Uvedeme další typ příkladů, který se velmi často vyskytuje.
Máme např. v E_2 integrovat přes obor

$$M = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \; a < \varphi_1(x,y) < b , \; c < \varphi_2(x,y) < d \right\} ,$$

kde φ_1, φ_2 jsou reálné funkce dvou proměnných.
Zavedeme zobrazení F z E_2 do E_2 takto:

$$F(u,v) = [x,y] \Leftrightarrow u = \varphi_1(x,y) , \quad u_2 = \varphi_2(x,y)$$

Položme

$$L = \left\{ [u,v] \in E_2 ; \; u \in (a,b) , \; v \in (c,d) \right\} .$$

25535 79

Je-li nyní

A/ $F(L) = M$,

B/ F prosté a regulární v L ,

tj. rovnosti $u = \varphi_1(x,y)$ $v = \varphi_2(x,y)$ se dají "řešit" pro $u \in (a,b)$, $v \in (c,d)$ podle x,y rovnicemi $x = f_1(u,v)$, $y = f_2(u,v)$, je

$$\iint_M G(x,y)\,dx\,dy = \iint_L G(f_1(u,v),\ f_2(u,v)) \cdot |D_{F^{-1}}(u,v)|\ du dv ,$$

existuje-li jeden z napsaných integrálů.

Nejdříve však ještě uvedeme několik příkladů na zobrazení z E_2 do E_2 .

$\boxed{5,57.}$ Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 předpisem

$$F(u,v) = [x,y] \iff x = u+v ,\quad y = u.v .$$

Označme

$$S = \{[u,v] \in E_2 ;\quad u = v\},$$
$$T = \{[x,y] \in E_2 ;\quad x^2 > 4y\}.$$

Potom

1/ $F(E_2 - S) = T$ (kreslete!),

2/ F není prosté v $E_2 - S$,

3/ F je regulární v každé otevřené množině $Q \subset E_2 - S$.

Označíme-li dále $L = \{[u,v] \in E_2 ;\quad u < v\}$, je

4/ $F(L) = T$,

5/ F prosté v L . Dokažte !

1/ Zvolme $[x,y] \in F(E_2-S)$, potom $[x,y] \in T$.
Neboť pro $[x,y] \in E_2 - T$ neexistuje žádné $[u,v] \in E_2 - S$ takové, že $F(u,v) = [x,y]$.
Zvolme naopak $[x,y] \in T$, řešíme-li soustavu rovnic

$$x = u + v ,\quad y = u.v$$

dostáváme dvě dvojice řešení

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4y}) ,\quad v_1 = \tfrac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4y}) ,$$
$$u_2 = \tfrac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4y}) ,\quad v_2 = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4y}) ,$$

Zřejmě $F(u_1 , v_1) = F(u_2 , v_2) = [x,y]$, $[u_1 , v_1] \in E_2 - S$, $[u_2 , v_2] \in E_2 - S$, tedy $[x,y] \in F(E_2 - S)$.

2/ Okamžitě plyne z předchozího.

Další je již snadné. $\|$

$\boxed{5,58.}$ Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 předpisem

$$F(u,v) = [x,y] \Leftrightarrow x = u.v \;, \quad y = \frac{u}{v} \;.$$

Označme $L_1 = \{[u,v] \in E_2 \;; \quad v = 0\}$

$L_2 = \{[u,v] \in E_2 \;; \quad u = 0\}$,

$L_3 = \{[u,v] \in E_2 \;; \quad u > 0 \;, \quad v > 0\}$.

Ukažte, že

1/ F není prosté v $E_2 - L_1$,

2/ F je regulární v každé otevřené množině $L \subset E_2 - L_1 \cup L_2$

3/ F je prosté v L_3 .

Jak vypadají množiny $F(L_i)$ pro $i = 1,2,3$?

$\boxed{5,59.}$ Zkoumejte v následujících příkladech, kde je zobrazení F z E_2 do E_2 regulární či prosté.

1/ $F(u,v) = [x,y] \Longleftrightarrow$

a/ $x = u + v \;, \quad y = (u + v)^2$,

b/ $x = u + v^2, \quad y = u^2$

c/ $x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \;, \quad y = \dfrac{v}{u^2+v^2}$,

d/ $x = u.v \;, \quad y = u(1-v)$,

e/ $x = \dfrac{u^2}{v} \;, \quad y = \dfrac{v^2}{u}$.

f/ $x = \frac{1}{2}(u+v), \; y = \sqrt{u.v}$,

g/ $x = \dfrac{v}{\sqrt{1+u^2}} \;, \; y = \dfrac{u.v}{\sqrt{1+u^2-v^2}}$,

h/ $x = \frac{a}{2}(u+v), \; y = \frac{b}{a}(u-v)$, $a,b \in E_1$.

$\overset{*}{2}$/ $F(r,\varphi) = [x,y] \Longleftrightarrow x = ar\cos^{\alpha}\varphi$, $y = br\sin^{\alpha}\varphi$,
$a,b\;\alpha \in E_1$

(zobecnění polární souřadnice).

5,60. Buď $M = \{[x,y] \in E_2 \;; \quad y \leqq x^2 \leq 4y \;, \quad 2x \leq y^2 \leq 3x\}$ -

kreslete !

Ukažte, že $M \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 M = 1$.

1/ Označme $K = \{[x,y] \in E_2 ;\ y < x^2 < 4y ;\ 2x < y^2 < 3x\}$

Množina M je uzavřená, K otevřená v E_2, tedy

$K, M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 K = \mu_2 M$ (proč?)

2/ Postupujte "starým" způsobem, dostanete

$$\mu_2 M = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}} \left(\int_{\sqrt{2x}}^{4x^2} dy \right) dx + \int_{\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{2}} \left(\int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{3x}} dy \right) dx + \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{3x}} dx \right) dx = 1 .$$

3/ Položme

$$u = \frac{y^2}{x} , \qquad v = \frac{x^2}{y}$$

a definujme zobrazení F z E_2 do E_2 předpisem

$$F(u,v) = [x,y] \Leftrightarrow u = \frac{y^2}{x} ,\ v = \frac{x^2}{y} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{uv^2} ,$$

$$y = \sqrt[3]{u^2 v} .$$

Označme

$$L = \{[u,v] \in E_2 ;\quad u \in (2,3) ,\quad v \in (1,4)\} .$$

Potom

A/ $F(L) = K$,

B/ F je prosté a regulární v L ,

C/ funkční determinant zobrazení F^{-1}

$$D_{F^{-1}}(x,y) = -3 ,$$

tedy $$D_F(u,v) = -\frac{1}{3} .$$

(Jaké jsme zde použili věty? Zkuste též spočítat $D_F(u,v)$ přímo).

Odtud plyne, že

$$\mu_2 M = \mu_2 K = \iint_K dx\, dy = \iint_L \left| -\frac{1}{3} \right| du\, dv = \frac{1}{3} \int_2^3 \left(\int_1^4 dv \right) du = 1 .$$

5,61. Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$ a spočtěte $\mu_2 M$ v následujících příkladech (postupujte přímo anebo pomocí substituce:

a/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\quad 2 < x + y < 3 ,\quad x < y < 3x\}$

Zřejmě

$$\mu_2 M = \int_1^{3/2} \left(\int_x^{3-x} dy \right) dx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} \left(\int_{2-x}^{3-x} dy \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \left(\int_{2-x}^{3x} dy \right) dx = \frac{5}{8}$$

anebo též po substituci

$$u = x + y , \qquad v = \frac{y}{x}$$

je $\mu_2 M = \iint_{(1,3)\times(1,3)} \frac{u}{(v+1)^2}\, du\, dv = \frac{5}{8}$ ‖ ,

b/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; py < x^2 < qy \; , \; ax < y^2 < bx \; , \text{ kde } 0 < p < q \; , \; 0 < a < b\}.$

‖ Stejná substituce jako v př. 5,60, $\mu_2 M = \frac{1}{3}\,(b-a)(p-q)$ ‖ ,

c/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; a < xy < b \; , \; py < x < qy \; , \text{ kde } 0 < a < b \; , \; 0 < p < q\}$

‖ Položme $u = xy \; , \; v = \frac{x}{y}$, tj.

$F(u,v) = [x,y] \Leftrightarrow x = \sqrt{uv} \; , \; y = \sqrt{\frac{u}{v}}$,

$L = \{[u,v] \in E_2 \; ; \; u \in (a,b) \; , \; v \in (p,q)\}$

Potom

$$\mu_2 M = \iint_L \left|\frac{1}{2v}\right| du\, dv = \frac{1}{2}\,(b-a) \log \frac{q}{p}$$ ‖ ,

d/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; (x^2 + y^2)^2 \leq 2ax^3\}$, kde $a > 0$

‖ Polární souřadnice, $\mu_2 M = \frac{5}{8}\pi a^2$ ‖

e/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; (x+y)^3 < a \cdot xy \; , \; x > 0 \; , \; y > 0\}$, $a > 0$.

‖ Substituce z př. 5,52 , $\mu_2 M = \frac{1}{60}\, a^2$ ‖ ,

f/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; (x + y)^5 < a\, x^2 y^2 \; , \; x > 0 \; , \; y > 0\}$, $a > 0$.

‖ Substituce z př. 5,52 , $\mu_2 M = \frac{a^2}{1260}$ ‖ ,

g/ Množina M je omezená křivkou $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$, a,b,c kladná

‖ Ukažte, že $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 < \frac{xy}{c^2}\}$

(doplněk této množiny je množina neomezená, stačí zvolit posloupnost bodů $A_n = [an \; , \; 0]$; zatímco množina M je omezená, což je např. lehko vidět z vyjádření v zobecněných polárních souřadnicích), zaveďte zobecněné polární souřadnice (viz 5,59 - 2)

$$x = ar \cos \varphi \; , \quad y = b\, r \sin \varphi \; ,$$

dostanete $\mu_2 M = \frac{a^2 b^2}{2c^2}$ ‖

h/ M je omezená křivkou $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \varphi(x,y)$, kde

1/ $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$, pak $\mu_2 M = \frac{\pi}{2} ab\,(a^2 + b^2)$,

2/ $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{c^2}$, $c > 0$, pak $\mu_2 M = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3 b}{c^2}$,

3/ $\varphi(x,y) = \frac{x^2 y}{c^3}$, pak $\mu_2 M = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{a^5 b^3}{c^6}$,

i/ množina M je omezená následujícími křivkami

1/ $xy = p$, $xy = q$, $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $0 < p < q$, $0 < a < b$,

potom $\mu_2 M = \frac{1}{3}(q - p) \cdot \log \frac{b}{a}$,

2/ $x^2 = py$; $x^2 = qy$, $y = ax$, $y = bx$, $0 < p < q$, $0 < a < b$,

potom $\mu_2 M = \frac{1}{6}(q^2 - p^2)(b^3 - a^3)$;

*j/ množina M je omezená křivkami

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 , \quad x^2 + (y-a)^2 = a^2 , \quad a > 0$$

[Zaveďte polární souřadnice,

$$\mu_2 M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2a \sin\varphi} r\,dr\right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr\right) d\varphi = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)] ,$$

k/ množina M je omezená křivkami

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0 , \quad x^2 + y^2 - ax = 0$$

[Polární souřadnice, $\mu_2 M = \frac{3}{4}\pi a^2$] ,

l/ množina M je omezená křivkami

$$x^2 + y^2 = R^2 , \quad x^2 + y^2 - 2Ry = 0 , \quad x = 0$$

[Polární souřadnice, $\mu_2 M = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$] ,

m/ množina M je omezená křivkou $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$

[Nakreslete si křivku M ! a ukažte, že jak množina

$\{[x,y] \in E_2 ;\ x^3 + y^3 < 3axy\}$, tak i množina

$\{[x,y] \in E_2 ;\ x^3 + y^3 > 3axy\}$

jsou neomezené v E_2 (v prvém případě uvažujte např. posloupnost bodů $A_n = [-n,0]$, v druhém $B_n = [0,n]$.

Přidejte proto další podmínku, že M leží v 1.kvadrantu, potom

$M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^3 + y^3 < 3axy ,\ x > 0 ,\ y > 0\}$ a $\mu_2 M =$
$= \frac{3}{2} a^2$.]

5,62. Dokazujte následující tvrzení:

a/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \; \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leq \frac{x^2 y}{c^3} \; , \; x \geq 0 \; , \; y \geq 0 \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_M xy \, dx\, dy = \frac{1}{840} \; \frac{a^{10} b^6}{c^{12}} \; ,$$

b/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \; \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1 \; , \; x \geq 0 \; , \; y \geq 0 \right\} \Rightarrow$

$$\iint_M \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \, dx\, dy = \frac{4}{27} \; ,$$

[Substituce $x = r \cos^4 \varphi$, $y = r \sin^4 \varphi$] ,

c/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \; \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1 \; , \; x \geq 0 \; , \; y \geq 0 \right\}$, $a > 0$,

$b > 0 \Rightarrow \iint_M \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 dx\, dy = \frac{2}{21} \, ab$,

[Substituce $x = a r \cos^4 \varphi$, $y = b r \sin^4 \varphi$] ,

d/ množina M je omezená křivkami $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $0 < a < b$, $0 < p < q$, potom

$$\iint_M \frac{x^2 \sin xy}{y} \, dx\, dy = \frac{\sin pb - \sin pa}{p} - \frac{\sin qb - \sin qa}{q} \; ,$$

e/ množina M je omezená křivkami

$$y = ax^3 \; , \; y = bx^3 , \; y^2 = px \; , \; y^2 = qx \; , \; 0 < a < b \; , \; 0 < p < q \; ,$$

potom

$$\iint_M xy \, dx\, dy = \frac{5}{48} \left(a^{-\frac{6}{5}} - b^{-\frac{6}{5}}\right) . \left(q^{\frac{8}{5}} - p^{\frac{8}{5}}\right) ,$$

f/ množina M je omezena křivkami

$$y^3 = ax^2 , \; y^3 = bx^2 , \; y = \alpha x \; , \; y = \beta x \; , \; 0 < a < b \; ; \; 0 < \alpha < \beta ,$$

potom

$$\iint_M xy \, dx\, dy = \frac{1}{40} \left(b^4 - a^4\right) \left(\alpha^{-10} - \beta^{-10}\right) ,$$

g/ množina M je omezená křivkou $\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2 y$,

potom $$\iint_M \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} = 2 \; ,$$

h/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \; \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 \leq \frac{xy}{6} \right\} \Rightarrow \iint_M \sqrt{xy} \, dxdy = \frac{2}{\sqrt[4]{6}}$.

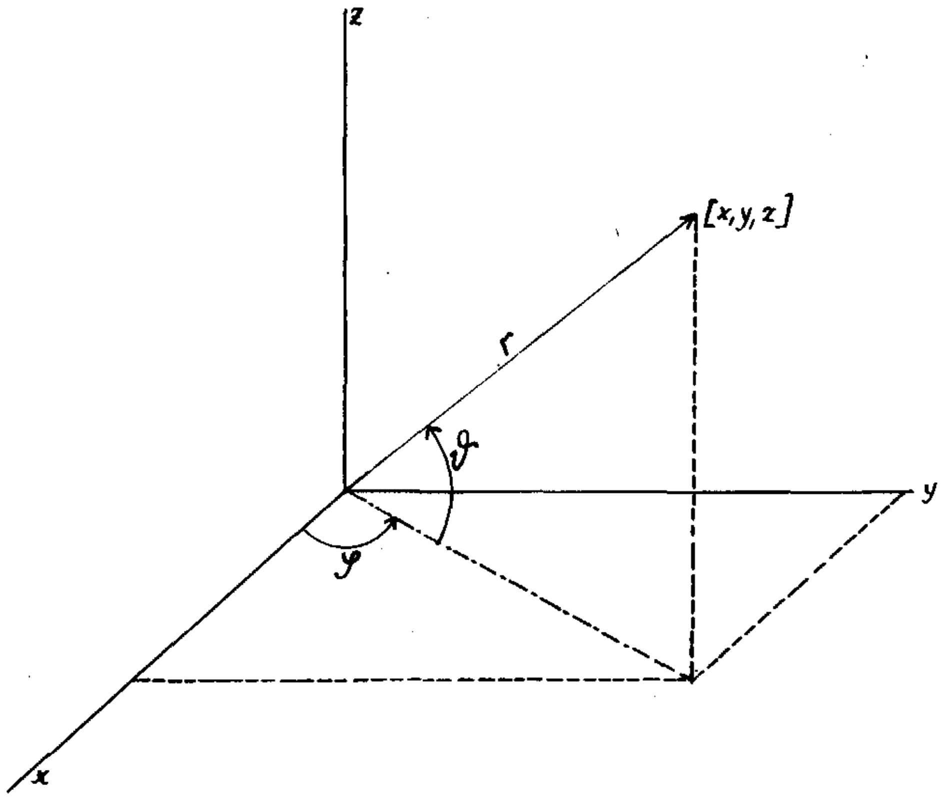
Při výpočtu trojných integrálů pomocí substituce budeme používat zejména tzv. sférické a cylindrické (válcové) souřadnice.

5,63. (Sférické souřadnice).

Definujme zobrazení F z E_3 do E_3 předpisem:

$$F(r, \varphi, \vartheta) = [x,y,z] \Leftrightarrow x = r\cos\varphi\cos\vartheta, \; y = r\sin\varphi\cos\vartheta, \; z = r\sin\vartheta .$$

Nakreslete si obrázek a představte si zobrazení F "geometricky".



Obrázek č.7

Ukažte, že

1/ zobrazení F zobrazuje množinu

$$L = \left\{ [r, \varphi, \vartheta] \in E_3 ; \; r \in (0, +\infty), \varphi \in (0, 2\pi), \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

prostě na množinu $E_3 - N$, kde

$$N = \left\{ [x,y,z] \in E_3 ; \; x \in \langle 0, +\infty), \; y = 0 \right\}$$

je nulová množina (v E_3 !),

2/ Jacobiův determinant zobrazení F je roven $r^2 \cos\vartheta$, tedy zobrazení F je regulární v každé otevřené množině $L_1 \subset L$.

5,64. Leckdy se "sférické souřadnice" zadávají takto:

$F(r, \varphi, \vartheta) = [x,y,z] \iff x = r \cos\varphi \sin\vartheta$, $y = r \sin\varphi \sin\vartheta$

$z = r \cos\vartheta$

(ϑ tedy znamená úhel mezi průvodičem bodu $[x,y,z]$ a osou z).

Zkoumejte prostoru a regularitu tohoto zobrazení obdobně jako v minulém př. 5,63.

5,65. (Cylindrické čili válcové souřadnice).

Definujme zobrazení F z E_3 do E_3 předpisem:

$F(r, \varphi, Z) = [x,y,z] \iff x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = Z$.

Opět si zobrazení F představte geometricky a porovnejte s polárními souřadnicemi v rovině !!

Ukažte, že

1/ zobrazení F zobrazuje množinu

$$L = \{[r, \varphi, Z] \in E_3 ;\ r \in (0, +\infty),\ \varphi \in (0, 2\pi),\ Z \in E_1\}$$

prostě na množinu $E_3 - N$, kde

$$N = \{[x,y,z] \in E_3 ;\ x \in \langle 0, +\infty),\ y = 0\}$$

je nulová množina,

2/ Jacobiův determinant zobrazení F je roven r , tedy zobrazení F je regulární v každé otevřené množině $L_1 \subset L$.

5,66. Spočtěte objem jednotkové koule v E_3 , tj. množiny

$$K = \{[x,y,z] \in E_3 ;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\} .$$

1/ Množina K je otevřená v E_3 , tedy $K \in \mathfrak{M}_3$.

2/ Buď

$$L = \{[r, \varphi, \vartheta] \in E_3 ;\ r \in (0,1),\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \vartheta \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\},$$

$$N = \{[x,y,z] \in E_3 ;\ x \in \langle 0, +\infty),\ y = 0\}$$

a zaveďme zobrazení F z E_3 do E_3 jako v př. 5,63 (sférické souřadnice).

Ukažte, že

a/ $F(L) = K-N$ (k tomu musíte ukázat, že jednak $F(L) \subset K - N$ a jednak $F(L) \supset K - N$) ,

b/ F je prosté v množině L ,

c/ F je regulární v množině L .

Potom podle věty o substituci a Fubiniovy věty je

$$\mu_3 K = \iiint_K dx\,dy\,dz = \iiint_{K-N} dx\,dy\,dz = \iiint_L r^2 \cos\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\vartheta\,d\vartheta \right) d\varphi \right) dr = \frac{4}{3}\pi \,.\, \|$$

5,67. Buď $M = \{[x,y,z] \in E_3 ;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az,\ x^2 + y^2 \leq z^2\}$, $a > 0$ (nakreslete!) Potom $M \in \mathfrak{M}_3$ a $\mu_3 M = \pi a^3$. Dokažte !

1/ Množina M je uzavřená v E_3, tedy $M \in \mathfrak{M}_3$
Označíme-li

$N = \{[x,y,z] \in E_3 ;\ x^2 + y^2 + z^2 = 2\,az\} \cup \{[x,y,z] \in E_3 ;$
$x^2 + y^2 = z^2\} \cup \{[x,y,z] \in E_3 ;\ y = 0,\ x \in \langle 0, +\infty)\}$,

je množina N nulová (ukažte!) a $\mu_3 M = \mu_3(M-N)$.

2/ Zaveďme opět "sférické souřadnice" (tj. zobrazení jako v 5,63). Hledáme nyní množinu L tak, aby

$$F(L) = M - N\,.$$

Z podmínky $x^2 + y^2 + z^2 < 2az$ dostáváme $r^2 < 2a\,r\sin\vartheta$, čili $0 < r < 2a\sin\vartheta$ a $\sin\vartheta > 0$.
Z druhé podmínky $x^2 + y^2 < z^2$ pak $r^2\cos^2\vartheta < r^2\sin^2\vartheta$, čili $\cos^2\vartheta < \sin^2\vartheta$ což dohromady s podmínkami $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\sin\vartheta > 0$ dává konečně $\vartheta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.
Položme tedy

$$L = \left\{[r, \varphi, \vartheta] \in E_3 ;\ r \in (0, 2a\sin\vartheta),\ \vartheta \in (\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}),\ \varphi \in (0, 2\pi)\right\}.$$

Ukažte, že

A/ $F(L) = M - N$,

B/ F je regulární a prosté v L.

Tedy

$$\mu_3 M = \mu_3(M-N) = \iiint_{M-N} dx\,dy\,dz = \iiint_L r^2\cos\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta =$$
$$= \pi a^3 \,\|$$

5,68. Nechť množina $M \subset E_3$ je omezená plochami $z = x^2 + y^2$, $z = 2$ (kreslete!).
Potom $\iiint_M z^2\,dx\,dy\,dz = 4\pi$, dokažte!

1/ Označme $M_1 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z > x^2 + y^2\}$,

$M_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z < x^2 + y^2\}$,

$N_1 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z > 2\}$,

$N_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z < 2\}$.

Množina $M_1 \cap N_1$ je neomezená (neboť např. $[0,0,n] \in M_1 \cap N_1$ pro $n > 2$), rovněž tak množiny $M_2 \cap N_1$, $M_2 \cap N_2$ jsou neomezené. Množina $M_1 \cap N_2$ je omezená, neboť

$$M_1 \cap N_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad x^2 + y^2 < z < 2\},$$

tedy $M = M_1 \cap N_2$. Odtud též vyplývá, že $M \in \mathcal{M}_3$.

2/ Označme $M_{x,y}$ průmět množiny M do roviny x,y, zřejmě $M_{x,y} = \{[x,y] \in E_2 ; \; x^2 + y^2 < 2\}$ (dokazujte !).
Pro $[x,y] \in M_{x,y}$ je

$$M^{x,y,*} = (x^2 + y^2, 2),$$

tedy $\iiint_M z^2 dx\, dy\, dz = \iint_{M_{x,y}} (\int_{M^{x,y,*}} z^2 dz) dx\, dy =$

$$= \iint_{M_{x,y}} (\int_{x^2+y^2}^{2} z^2 dz)\, dx\, dy = \iint_{M_{x,y}} \frac{1}{3}\left[8 - (x^2 + y^2)^3\right] dx\, dy.$$

Zde již můžeme integrovat přímo podle Fubiniovy věty (zkuste!), výhodnější bude ale použít polární souřadnice, potom

$$\iiint_M z^2\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (\int_0^{\sqrt{2}} \left[(8 - r^6)\, r\, dr \quad d\varphi\right] = 4 . \pi .$$

3/ Označíme-li M_z průmět množiny M do osy z, je

$M_z = (0,2)$ a pro $z \in M_z$ jest

$$M^{*,*,z} = \{[x,y] \in E_2 ; \; x^2 + y^2 < z\}.$$

Tedy

$$\iiint_M z^2\, dz\, dx\, dy = \int_{M_z} (\int_{M^{*,*,z}} z^2\, dx\, dy)\, dz = \int_0^2 z^2 \mu_2 M^{*,*,z}\, dz,$$

ak $M^{*,*,z}$ je vnitřek kruhu o poloměru $\sqrt{z}$, tedy

$$\mu_2 M^{*,*,z} = \pi z \quad \text{a}$$

$$\iiint_M z^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 \pi z^3 dz = 4\pi .$$

4/ Zkusme také použít cylindrické souřadnice

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = Z .$$

Označíme-li

$$L = \{[r, \varphi, Z] \in E_3 ; \; r \in (0,\sqrt{Z}), \varphi \in (0,2\pi), Z \in (0,2)\},$$

jest
$$\iiint\limits_M z^2 dx\,dy\,dz = \iiint\limits_L rZ^2\,dr\,d\varphi\,dZ = 4\pi \;.\;\|$$

$\boxed{5{,}69.}$ **Spočítejte míry následujících množin:**

a/ množina $M \subset E_3$ je omezená plochami

$$x = 0\,,\quad x = a\,,\quad y = 0\,,\quad y = b\,,\quad z = 0\,,\quad z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\,,$$

a,b,p,q,z vesměs kladná $\Rightarrow \mu_3 M = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right)$,

b/ množina M omezená $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 \leqq r^2$, $r < R \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu_3 M = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right)$

c/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3\,;\ (x^2 + y^2 + z^2) \leqq a^3 z\,,\ x \geqq 0\,,\ y \geqq 0\,,\ z \geqq 0\right\}$

‖ Sférické souřadnice, $\mu_3 M = \frac{1}{6}\pi a^3$ ‖,

d/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3\,;\ (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz\right\}$, $\mu_3 M = \frac{1}{6} a^3$

e/ množina M je omezená plochou $(x^2 + y^2 + z^2)^n = x^{2n-1}$, $n > 1$

‖ položte $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = r\sin\varphi\sin\vartheta$

$$\mu_3 M = \frac{\pi}{3(3n-1)}\ \|,$$

*f/ množina M omezená $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$

$$\|\ \mu_3 M = \frac{4}{3}\int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}\ \|,$$

*g/ množina M omezena $(x^2 + y^2)^3 + z^6 = 3z^3$, $\mu_3 M = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$

h/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3\,;\ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 \leqq \frac{x^2 y}{h^3}\right\}$

a,b,c,h kladná

‖ položte $x = ar\cos\varphi\cdot\cos\vartheta$, $y = br\cos\varphi\cdot\cos\vartheta$,
$z = cr\sin\vartheta$,

$$\mu_3 M = \frac{\pi}{192}\ \frac{a^7 b^4 c}{h^9}\ \|$$

i/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3\,;\ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 \leqq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right\}$

$\mu_3 M = \frac{\pi^2}{4}\,abc$,

j/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \; \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \leqq \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \frac{z}{c} \right\}.$

$\mu_3 M = \frac{\pi}{60}\, abc$,

k/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$,

$z^2 = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 0$, $y = x$

‖ sférické souřadnice , $\mu_3 M = \frac{21 \cdot \sqrt{2}\,\pi}{4}$, ‖

l/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \; \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \leqq 1 \right\}$, $\mu_3 M = \frac{4}{35}\pi\, abc$

‖ položit $x = ar \sin^3\varphi \cos^3\vartheta$; $y = br \sin^3\varphi \sin^3\vartheta$,

$z = cr \cdot \cos^3\varphi$, ‖

m/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \; (x + y + z)^2 < ay \, , \; x > 0 \, , \; y > 0 \, , \; z > 0 \right\}$,

$\mu_3 M = \frac{1}{60}\, a^3$

‖ položte $x = r \sin^2\varphi \cos^2\vartheta$, $y = r \sin^2\varphi \sin^2\vartheta$,

$z = r \cos^2\vartheta$ ‖,

n/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \; \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \leqq ax \, , \; a > 0 \right\} \Rightarrow \mu_3 M =$

$= \frac{1}{3}\pi\, a^2 bc$,

o/ M je omezena $c(x^2 + y^2) + a^2 z = a^2 c$, $z = 0$, $a > 0$,

$c > 0$

‖ cylindrické souřadnice, $\mu_3 M = \frac{1}{2}\pi a^2 c$ ‖

p/ M je omezena plochami $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_3 M = \frac{7}{6}\pi$,

q/ M je omezena $x^2 + y^2 = 4z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, $\mu_3 M =$

$= \frac{8}{3}\pi (6\sqrt{3} - 5)$,

r/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$

$\Rightarrow \mu_3 M = \frac{80}{3}\pi$

s/ M je omezena $y^2 = pz$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $p > 0$,

$\mu_3 M = \frac{\pi a^4}{4p}$,

t/ M omezena $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = z$, $z = 0 \rightarrow \mu_3 M = \frac{\pi R^4}{2}$, u/ spočítejte příklady v 5,42 pomocí substituce (pokud je to výhodné).

5,70. **Dokažte následující tvrzení:**

a/ $M = \{[x,y,z] \in E_3 \; ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1\} \Rightarrow$

$$\iiint_M \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx\, dy\, dz = \frac{4}{5} \pi abc ,$$

b/ $M = \{[x,y,z] \in E_3 \; ; \quad x^2 + y^2 \leqq 2az, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2\} \Rightarrow$

$$\iiint_M (x + y + z)^2 \, dx\, dy\, dz = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \, dx\, dy\, dz =$$
$$= \frac{\pi a^5}{5} (18 \sqrt{3} - \frac{97}{6}) ,$$

c/ $M = \{[x,y,z] \in E_3 \; ; \quad y^2 + z^2 \leqq x^2 , \quad x \geq 0 , \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2\}$

$$\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \, dx\, dy\, dz = \frac{\pi R^5}{5} (2 - \sqrt{2}) ,$$

d/ M je omezena $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2y , \quad z = 0 \Rightarrow \iiint_M \frac{xyz}{x^2+y^2} \, dx\, dy\, dz =$
$$= \frac{a^4}{144} ,$$

e/* $M = \{[x,y,z] \in E_3 \quad x \geq 0 , \quad y \geq 1 , \quad z \geq 1 , \quad xyz \leqq 1\} \Rightarrow$

$$\iiint_M e^{xyz} \cdot x^2 y \, dx\, dy\, dz = \frac{e}{2} - 1$$

[Zaveďte substituci $x = u , \quad y = \frac{u+v}{u} , \quad z = \frac{u+v+w}{u+v}$] ,

f/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 4 , \quad x^2 + y^2 = 3z \Rightarrow \iiint_M z \, dx\, dy\, dz =$
$$= \frac{13}{4} \pi .$$

Fubiniovy věty lze též užít k výpočtu některých integrálů. Metodě, podle které budeme v následujících příkladech postupovat, se někdy říká "integrace podle parametru".

5,71. Spočtěte integrál $I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} \, dx$.

(viz též př. 6,44 .)

[Lehko zjistíte viz obdobný příklad 3,42 - že pro $a \leq 0, \quad b > 0$ anebo pro $a > 0 , \quad b \leq 0$ integrál $I(a,b)$ diverguje. Buď tedy $a > 0 , \quad b > 0$, nechť např. je $b < a$.

Uvažujme následující integrál I ,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2} \, dx\, dy , \text{ kde } M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \quad x \in (0,+\infty) \quad y \in (b,a)\}$$

Funkce $\frac{1}{1+x^2y^2}$ je spojitá a kladná na množině M, tedy $\frac{1}{1+x^2y^2} \in \mathcal{L}_M^R$ a můžeme použít Fubiniovu větu.

Dostáváme

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dxdy = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{dy}{1+x^2y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx =$$

$$= I(a,b) ,$$

na druhé straně, provedeme-li integraci v obráceném pořadí,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy = \int_b^a \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx \right) dy = \int_b^a \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{y} \right]_{x=0}^{x=+\infty} dy =$$

$$= \int_b^a \frac{\pi}{2y}\,dy = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} .$$

Odtud vyplývá, že

$$I(a,b) = I = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} .$$

V praxi ovšem funkci $\frac{1}{1+x^2y^2}$ a množinu M musíme nalézt, obyčejně postupujeme takto:

$$\frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} = \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right) dy =$$

$$= \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\,dy . \rfloor$$

Z uvedeného příkladu bylo vidět, v čem spočívá metoda integrace podle parametru. Oklikou přes dvojný integrál se nám podařilo spočítat integrál, s kterým bychom si jinak těžko věděli rady. Jiné způsoby výpočtu těchto integrálů, pomocí metody derivace podle parametru, jsou uvedeny v následující 6. kapitole.

5,72. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log \frac{b+1}{a+1}$ pro $a \in (-1,+\infty)$, $b \in (-1,+\infty)$.

1/ Zjistěte jako cvičení, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > -1$, $b > -1$.

2/ Buď $-1 < a < b$. Potom

$$\frac{x^b-x^a}{\log x} = \left[\frac{x^y}{\log x}\right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^y}{\log x}\right) dy = \int_a^b x^y\, dy .$$

Ukažte, že na integrál

$$\iint_M x^y\, dx\, dy , \quad M = \{[x,y] \in E_2 ; \quad x \in (0,1) \quad y \in (a,b)\}$$

můžete použít Fubiniovu větu, dostanete

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\, dx = \iint_M x^y dx\, dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\, dx\right) dy = \log \frac{b+1}{a+1} .$$

5,73. Poznámka:

Speciální volbou hodnot a,b dostáváme z minulého příkladu např.

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\, dx = \log 2 \ (b = 1 , \quad a = 0) ,$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\log x}\, dx = \log \tfrac{3}{2} \ (b = \tfrac{1}{2} , \quad a = 0), \text{ atd.,}$$

kteréžto integrály bychom asi jinak těžko počítali.

5,74. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} = \pi \arcsin \frac{b}{a} \quad \text{pro } 0 < b \leq a .$$

A/ Použijte vztahů

1/ $\log \dfrac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \dfrac{1}{\sin x} = 2ab \displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2 \sin^2 x}$

pro $0 < b \leq a$,

2/ $\dfrac{1}{a^2-b^2y^2\sin^2 x} \in \mathcal{L}_M^R$ pro $M = \{[x,y] \in E_2 ;$

$x \in (0, \frac{\pi}{2}), \ y \in (0,1) \}$,

3/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{A^2 - B^2\sin^2 z} = \frac{\pi}{2A} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2-B^2}}$ pro $|A| > |B|$.

B/ Použijte též vztahu

$$\frac{1}{\sin x} \cdot \log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} = 2a \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - y^2 \sin^2 x} \quad .$$

Jaký bude výsledek pro $a \leq b < 0$?]

5,75. Ukažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+\sqrt{2})$.

[Použijte vztahů

1/ $\displaystyle \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$,

2/ $\displaystyle \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2 \sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$].

5,76. Dokažte následující tvrzení

a/ $\displaystyle \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\, dx = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ pro $a \geq 0$, $b \geq 0$

[Použijte příkladu 5,84 , viz též 6,35]

b/ $\displaystyle \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx = \frac{1}{2} \log \frac{b}{a}$ pro $a > 0$, $b > 0$,

c/ $\displaystyle \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \log \frac{b}{a}$ pro $a > 0$, $b > 0$,

d/ $\displaystyle \int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2) - \log(1+b^2x^2)}{x^2}\, dx = \pi (a-b)$ pro $a,b \in E_1$,

e/ $\displaystyle \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx = \sqrt{\pi}\,(b-a)$ pro $a,b \in E_1$,

f/ $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \operatorname{arc\,tg} \frac{b \sin x}{a}\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{a}$ pro $a > 0$, $b \geq 0$

[$\displaystyle \frac{1}{\sin x} \operatorname{arc\,tg} \frac{b \sin x}{a} = \int_0^1 \frac{ab}{a^2 + b^2y^2 \sin^2 x}\, dy$]

Další část této kapitoly věnujeme otázkám konvergence a divergence integrálů funkcí více proměnných. Důležitou roli zde bude hrát věta o substituci - ještě jednou si ji zopakujte !

25535 210

5,77. Pro které hodnoty α konverguje $\iint_M \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$,

je-li $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$?

Funkce $\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ jest kladná a spojitá v množině $M - \{[0,0]\}$ tedy zajisté $\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \in \mathcal{L}_M^R$ pro jakékoliv $\alpha \in E_1$ (znovu si uvědomte, že daná funkce není definovaná všude v množině M - není totiž definována v počátku - ale protože jednobodová množina je nulová množina, můžeme naši funkci dodefinovat v počátku jak chceme, aniž tím cokoliv změníme na existenci či konvergenci integrálu).

Zavedeme zobrazení F z E_2 do E_2 (polární souřadnice)

$$F(r, \varphi) = [x,y] \Leftrightarrow x = r\cos\varphi ,\quad y = r\sin\varphi ,$$

dostáváme, že

$$\iint_M \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \iint_L r^{1-2\alpha}\, d r\, d\varphi ,$$

kde $L = \{[r,\varphi] \in E_2 ;\quad r \in (0,1) ,\ \varphi \in (0,2\pi)\}$.

Víme, že druhý integrál

$$\iint_L r^{1-2\alpha} dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^{1-2\alpha}\, dr\right) d\varphi$$

konverguje, právě když $1 - 2\alpha > -1$,čili pro $\alpha < 1$.

Podle věty o substituci tedy náš původní integrál konverguje, právě když $\alpha < 1$.

Vše si důkladně a detailně rozmyslete a proveďte !

5,78. Buď $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$, ukažte, že

a/ $\frac{1}{(2x^2+3y^2)^\alpha} \in \mathcal{L}_M \Leftrightarrow \alpha < 1$

Postupujte stejně jako v minulém př. 5,77, zaveďte "zobecněné polární souřadnice"

$$x = \sqrt{3}\, r\cos\varphi ,\quad y = \sqrt{2}\, r\sin\varphi ,$$

b/ $\iint_M \frac{dx\,dy}{(x^2-xy+y^2)^\alpha}$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Ukažte, že $\frac{1}{(x^2-xy+y^2)^\alpha} \in \mathcal{L}_M^R$ (kde není funkce definována?) a že

$$\iint_M \frac{dxdy}{(x^2-xy+y^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1-\sin\varphi\cos\varphi)^\alpha} \cdot \int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-1}}\, dr ,$$

přičemž první integrál existuje jako Riemannův pro jakékoliv $\alpha \in E_1$ a druhý integrál konverguje, právě když $\alpha < 1$.

5,79. Buď $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$, potom

$$\iint_M \frac{dx\,dy}{(y^2\cos^2 x + \sin^2 x)^\alpha} \quad \text{konverguje} \Leftrightarrow \alpha < 1 .$$

Použijte vztahů

$$x \in \langle 0,1\rangle \Rightarrow \frac{2}{\pi}\, x \leq \sin x \leq x , \quad \cos 1 \leq \cos x \leq 1 ,$$

tedy funkce $\dfrac{1}{(y^2\cos^2 x + \sin^2 x)^\alpha}$ se bude "chovat" asi stejně jako funkce $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ – proveďte podrobně ! , při odhadech nutno rozlišit případy $\alpha \geq 0$, $\alpha < 0$.

5,80. Zkoumejte konvergenci a divergenci následujících integrálů:

a/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, pak $\displaystyle\iint_M \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < 1$,

b/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \geq 1\}$, pak $\displaystyle\iint_M \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$,

c/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^\alpha + x^\beta \leq 1 ,\ x \geq 0 ,\ y \geq 0\}$ $\alpha > 0$, $\beta > 0$, potom

1/ $\displaystyle\iint_M \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^m}$ konverguje $\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > m$,

2/ $\displaystyle\iint_M \frac{dxdy}{(1-x^\alpha - y^\beta)^m}$ diverguje $\Leftrightarrow m \geq 1$,

použijte substituce

$$x = r^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \cos^{\frac{2}{\alpha}} \varphi , \quad y = r^{\frac{2}{\beta}} \sin^{\frac{2}{\beta}} \varphi ,$$

d/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^\alpha + y^\beta \geq 1 ,\ x \geq 0 ,\ y \geq 0\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, potom

$$\iint_M \frac{dxdy}{(x^\alpha + y^\beta)^m} \quad \text{konverguje} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < m ,$$

e/ M je omezena křivkami $y = 0$, $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$,

potom $\iint_M \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ konverguje

‖ zavedeme-li polární souřadnice, existuje takové $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ (nezáleží nám teď na jeho velikosti), že

$$\iint_M \frac{dxdy}{x^2 + y^2} = \iint_L \frac{1}{r}\, dr\, d\varphi , \quad \text{kde}$$

$$L = \left\{ [r,\varphi] \in E_2 ; \quad r \in \left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} , 1 \right) , \quad \varphi \in (0, \varphi_0) \right\},$$

poslední integrál je roven $\int_0^{\varphi_0} \log \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi$,

o kterém zjistíme, že konverguje ‖ ,

f/ $M = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \quad x \geqq 0 , \quad y \geqq 0 , \quad x + y \leqq 1 \right\}$, potom

$$\iint_M \frac{dxdy}{1-x^2-y^2} \quad \text{konverguje}$$

‖ Zavedeme-li polární souřadnice, bude

$$\iint_M \frac{dxdy}{1-x^2-y^2} = - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin 2\varphi}{1+\sin 2\varphi}\, d\varphi$$

a poslední integrál konverguje ‖ ,

g/ definujme funkci f předpisem $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,

potom

1/ $M = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \quad x \geqq 0 , \quad x \leqq y \leqq 1 \right\} \Rightarrow \iint_M f = +\infty$

‖ přímý výpočet anebo polární souřadnice ‖ ,

2/ $N = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \quad y \geqq 0 , \quad 1 \geqq x \geqq y \right\} \Rightarrow \iint_N f = -\infty$,

3/ $P = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \Rightarrow \iint_P f$ neexistuje

‖ použijte dvou předchozích výsledků a věty 26, či věty 42, viz též př. 5,81 ‖ ,

4/ $O = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \quad x \in \langle 0,1 \rangle , \quad y \in (1,+\infty) \right\} \Rightarrow \iint_O f$ konverguje, 5/ $Q = \{[x,y] \in E_2 \,;\; x \leqq y\,,\; x \geqq 1\} \Rightarrow \iint_Q f$ nekonverguje,

h/ M je omezena křivkami $y = 0$, $x = \pi$, $y = x$, potom

$$\iint_M \log \sin (x-y)\, dx\, dy \quad \text{konverguje .}$$

⌈ Zaveďte substituci $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$ a ukažte, že

$$\iint_M \log \sin (x-y) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \log \sin v\, dv \text{ , poslední integrál}$$

konverguje;

použijeme-li výsledků cvičení 6,30, 5,87 či 8,64, dostáváme navíc, že

$$\iint_M \log \sin (x-y) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \log \sin v\, dv = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin v\, dv =$$
$$= -\frac{\pi^2}{2} \log 2 \ \rfloor \text{,}$$

i/ $M = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$, $k \in E_1 \Rightarrow \iint_M e^{-x-y} \dfrac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\, dx\, dy$ konverguje

⌈ daný integrál odhadněte a použijte vztahu $\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ ⌋ ,

j/ $M = (0, +\infty) \times (0, +\infty) \Rightarrow \iint_M e^{-xy} \sin x\, dx\, dy$ nekonverguje

⌈ Ukažte, že

$$\iint_M |e^{-xy} \sin x|\, dx\, dy = \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty$$

(viz př. 3,47) a použijte věty 44 .

Může být $e^{-xy} \sin x \in \mathcal{L}^*_M$? ⌋ ,

k/ $M = (0,+\infty) \times (0,+\infty) \Rightarrow \iint_M \sin (x^2+y^2) dx dy$ neexistuje

⌈ předpokládejte $\sin(x^2+y^2) \in \mathcal{L}^*_M$, označte pro $n = 1,2,\ldots$

$K_n = \{[x,y] \in E_2 \,;\; x^2 + y^2 \leqq n\,,\; x \geqq 0\,,\; y \geqq 0\}$,

Potom podle věty 28 musí být

$$\iint_M \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \sin(x^2 + y^2) dx\, dy\text{ ,}$$

zavedete-li do posledního integrálu polární souřadnice, jest

$$\iint_{K_n} \sin (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}(1 - \cos n^2)$$

a poslední výraz nemá pro $n \longrightarrow +\infty$ limitu . ⌋

Obdobně se vyšetřuje konvergence a divergence troj - i vícerozměrných integrálů. Nebudeme se tím však zabývat.

Fubiniova věta nám tedy zaručuje, že dvojný integrál se rovná kterémukoliv dvojnásobnému, toto obecně nemusí být pravda (potom ovšem dvojný integrál nemůže existovat!). Uveďme příklady.

5,81. Definujme funkci f takto: $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, potom

a/ $\iint_M f$ neexistuje, je-li $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$,

b/ $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = \dfrac{\pi}{4}$,

c/ $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = -\dfrac{\pi}{4}$.

⟦ K prvnímu bodu viz příklad 5,80, ostatní ověřte přímým výpočtem. ⟧

5,82. Ukažte, že

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy \right) dx = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$

Odtud odvoďte podle Fubiniovy věty, že $\iint_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle} \dfrac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\, dy$ neexistuje. Poslední tvrzení dokažte také přímo. ⟧

5,83. Ukažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3} \right] \cdot e^{-\frac{x}{y^2}}\, dx \right) dy = -\frac{1}{e}$,

$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3} \right] e^{-\frac{x}{y^2}}\, dy \right) dx = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2}$.

b/ buď $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ na množině $M = E_1 \times E_1$, potom

1/ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy \right) dx = 0$,

2/ $f \notin \mathcal{L}^*_M$

c/ buď

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^3} & \text{pro } 0 < y < \left| x - \frac{1}{2} \right|, \\ 0 & \text{jinde v } E_2, \end{cases}$$

buď dále $M = (0,1) \times (0,1)$, potom

1/ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$ neexistuje,

$$2/ \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = 0 .$$

Zbytek této kapitoly věnujeme různým příkladům.

5,84. a/ Spočtěte $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ (tzv. Laplaceův integrál).

1/ V př. 3,32 jsme ukázali, že tento integrál konverguje.

2/ Označte $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, $M = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

Pomocí Fubiniovy věty ukažte, že

$$\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = I^2 .$$

Do integrálu $\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ "zaveďte polární souřadnice", dostanete

$$\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\infty} r\,e^{-r^2}\,dr\right) d\varphi = \frac{\pi}{4} ,$$

odtud vzhledem k podmínce $I \geq 0$ plyne $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3/ Jiný způsob:

do integrálu $\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ proveďte substituci

$x = u$, $y = u.v$, dostanete

$$\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2(1+v^2)} . u\,du\right) dv = \frac{\pi}{4} .$$

*4/ Ještě jiný způsob:

Pro $n = 1,2 \dots$ položte

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{pro } x \in (0, \sqrt{n}) , \\ 0 & \text{pro } x \in \langle \sqrt{n}, +\infty) . \end{cases}$$

Ukažte, že

a/ $|f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $n = 1,2 \dots$,

b/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$ pro každé $x \in (0,+\infty)$.

Podle Lebesgueovy věty je tedy

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx .$$

Zbývá spočítat poslední integrály a jejich limitu. Po provedení substituce $x = \sqrt{n} . \cos t$, dostáváme s použitím Wallisovy formule výsledek.

Viz též V.Jarník, Integrální počet II . ‖

b/ Substitucí odtud lehko odvodíte, že $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pro $a \in (0,+\infty)$.

$\boxed{5{,}85.}$ Uvedeme ještě jeden důležitý příklad.

Buď $M = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$, $\quad I = \iint_M \frac{dt\,dx}{(1+t)(1+tx^2)}$.

Na poslední integrál použijte Fubiniovu větu (pokaždé v jiném pořadí integrace) a dostanete jednak

$$I = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(1+t)(1+tx^2)} \right) dt = \frac{\pi^2}{2} ,$$

jednak

$$I = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)(1+tx^2)} \right) dx = 2 \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx .$$

Ukažte dále, že $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx = -\frac{3}{2} \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx$

‖ Použijte v prvním integrálu substituci $x = \frac{1}{t}$ na intervalu $(1,+\infty)$ a pak vztahu

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\log y}{1-y}\,dy = \int_0^1 \frac{\log y}{1-y^2}\,dy + \int_0^1 \frac{y \log y}{1-y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{\log y}{1-y^2}\,dy + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\log z}{1-z}\,dz . ‖$$

Konečně s použitím příkladu 4,25

$$\left[\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \right]$$

dostáváme

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{6} .$$

Podařilo se nám tímto způsobem s pomocí Fubiniovy věty sečíst konvergentní řadu $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$,

(jiným způsobem lze sečíst tuto řadu např. pomocí teorie Fourierových řad).
Pomocí tohoto výsledku ukažte, že

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{8} .$$

(Použijte známých vlastností absolutně konvergentních řad a následující myšlenku:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ,$$

jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!)

Ukažte též, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \right) .$$

5,86.* Spočtěte $I = \iint_M \frac{du\,dt}{(1+tu)(1+tu^2)}$, kde

$M = \left\{ [t,u] \in E_2 \;;\; t \in (0,+\infty) \;,\; u \in (1,+\infty) \right\}$.

Použijete-li Fubiniovu větu, dostanete jednak

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+tu)(1+tu^2)} \right) du = \int_1^{\infty} \frac{\log u}{u\,(u-1)}\, du ,$$

jednak

$$I = \int_0^{\infty} \left(\int_1^{\infty} \frac{du}{(1+tu)(1+tu^2)} \right) dt = -\frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\log x\, dx}{x(x-1)} + \frac{\pi^2}{4} .$$

Odtud dostáváme /viz též př. 4,26/, že

$$\frac{\pi^2}{6} = \int_1^{\infty} \frac{\log u}{u(u-1)}\, du = \int_0^{\infty} \frac{z\,dz}{e^z - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Opět se nám podařilo sečíst řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5,87. Počítejte $\iint_M \frac{dx\, d\lambda}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x}$, $M = \left\{ [x, \lambda] \in E_2 \;;\; x \in (0,\frac{\pi}{2}),\ \lambda \in (0,1) \right\}$.

Lehko zjistíte, že $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+\lambda}$ pro $\lambda \in (0,+\infty)$

(viz též př. 6,17), tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{d\lambda}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx ,$$

zatímco

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x} \right) d\lambda = \frac{\pi}{2} \cdot \log 2 .$$

Odtud podle Fubiniovy věty dostáváte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg}x} \, dx = \frac{\pi}{2} \log 2 .$$

Integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg}x} dx$ existuje jako Riemannův i jako Newtonův, budeme-li jej integrovat jako Newtonův per partes, obdržíme

$$(N) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg}x} \, dx = - (N) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$$

/všimněte si, že integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$ neexistuje již jako Riemannův, existuje pouze jako Lebesgueův či Newtonův/. Odtud plyne, že

$$(L) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = (N) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = - \frac{\pi}{2} \cdot \log 2$$

/viz též příklady 6,30 a 8,64/.

5,88.[o] **Poznámka.**

Znovu na tomto místě připomeňme, že nemáme prozatím žádnou větu o integraci per partes pro Lebesgueovy integrály. Chceme-li přesto integrovat per partes, můžeme tuto metodu použít pouze pro Newtonovy integrály /věta 70/; víme-li, že daná funkce má jak Lebesgueův tak Newtonův integrál, musí pak mezi těmito integrály nastat rovnost /viz 3,15/.

5,89.[*] Zkoumejte $F(m) = \iint_M \cos mx \cdot \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)} \, dx \, d\alpha$,

$M = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

1/ Ukažte, že $\cos mx \cdot \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)} \in \Lambda_M$ pro každé $m \in E_1$.

2/ Ze vztahů

$$\left| \cos mx \cdot \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)} \right| \leq \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)} ,$$

$$\iint_M \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)} \, dx \, d\alpha = \frac{\pi}{4}$$

plyne, že daný integrál pro každé $m \in E_1$ konverguje /věta 31/, lze tedy použít Fubiniovu větu.

3/ Použijete-li výsledků ze cvičení 5,84 a 6,51 dostanete pro $m \geq 0$, že

$$F(m) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2} \left(\int_0^\infty \cos mx \cdot e^{-\alpha^2 x^2} dx \right) d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 - \frac{m^2}{4\alpha^2}} \, d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-m}$$

a také

$$F(m) = \int_0^\infty \cos mx \left(\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\, d\alpha\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\, dx \;\Big\|\,.$$

$\boxed{5{,}90.}$ Ukažte, že pro každé $m \geq 0$ je

$$C(m) = \int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-m},$$

$$S(m) = \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2}\,(1 - e^{-m})\,.$$

1/ Jako cvičení ukažte, že oba integrály konvergují.

2/ Podle předešlého cvičení 5,89 jest $C(m) = \frac{\pi}{2} e^{-m}$.

3/ Ukažte - viz kapitolu o derivaci integrálu podle parametru - že

$S'(m) = C(m)$,

odtud vzhledem k podmínce $S(0) = 0$ dostáváme tvrzení. ||

Jaký bude výsledek pro $m < 0$?

$\boxed{5{,}91.^*}$ Ukažte, že $\int_0^\infty \log\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right) . \cos mx\, dx = \frac{\pi}{m}\,\left(e^{-bm} - e^{-am}\right)$

pro $a > 0$, $b > 0$, $m > 0$.

Použijte vztahu

$$\log\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right) \cos mx = \int_b^a \frac{2y \cos mx}{y^2+x^2}\, dy$$

/jak jej odvodíte? / ,

Fubiniovu větu a výsledek předchozího cvičení 5,90.

Viz též př. 6,68 . ||

Jaký bude výsledek pro $m < 0$, $a \leq 0$, $b \leq 0$ či pro $m = 0$?

$\boxed{5{,}92.^*}$ Ukažte, že

a/ $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2a}\, e^{-ma}$ pro $a > 0$, $m \geq 0$,

b/ $\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{a^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4a}\,(1-e^{-2ma})$ pro $a > 0$, $m \geq 0$,

c/ $\int_0^\infty \frac{\cos^2 mx}{a^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4a}\,(1+e^{-2ma})$ pro $a > 0$, $m \geq 0$.

a/ Lehko plyne z 5,90 substitucí.

b/ Použijte vztahu $\sin^2 mx = \frac{1}{2}(1-\cos 2mx)$ a odstavce a/.

c/ Použijte vztahu $\cos^2 mx = 1 - \sin^2 mx$ a odstavce b/ , či vztahu $\cos^2 mx = \frac{1}{2}(1+\cos 2mx)$ a odstavce a/ .

5,93.* Ukažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx}{x^2}\,dx = \frac{\pi m}{2}$ pro $m \geq 0$.

Buď $m \in \langle 0,+\infty)$ pevné, označme $\displaystyle F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx}{a^2+x^2}\,dx$.

Ukažte, že funkce F je spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$ /viz 6.kapitola/, odtud spolu s výsledkem př. 5,92b plyne

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx}{x^2}\,dx = F(0) = \lim_{a\to 0_+} F(a) = \lim_{a\to 0_+} \frac{\pi}{4a}(1-e^{-2ma}) = \frac{\pi m}{2} .$$

Viz též př. 6,73.

Jaký by byl výsledek pro $m < 0$?

5,94.* Ukažte, že pro $a \in (0,+\infty)$, $m \in E_1$ jest

$$I(a,m) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cdot \cos mx^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+m^2}}{a^2+m^2}} .$$

Postup je stejný jako při výpočtu Laplaceova integrálu /př. 5,84/. Ukažte, že

$$I^2(a,m) = \frac{1}{2} \iint_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} e^{-a(x^2+y^2)} \cdot \left[\cos m(x^2+y^2) + \cos m(x^2-y^2)\right] dx dy.$$

Do posledního integrálu zaveďte polární souřadnice a využijte výsledku cvičení 4,48 , dostanete

$$I^2(a,m) = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a}{a^2+m^2} + \frac{a}{a^2+m^2\cos^2 2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{a}{a^2+m^2} + \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+m^2}} ,$$

odkud již plyne výsledek.

5,95. Ukažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2}$ pro $a \in (0,+\infty)$.

Použijte vztahu

$$e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x} = \left[e^{-ax}\,\frac{\cos yx}{x}\right]_{y=1}^{y=0} = \int_0^1 e^{-ax} \cdot \sin xy\,dy$$

a cvičení 4,47. Viz též př. 6,72.

V dalším ukážeme, že v oboru riemannovsky intergrovatelných funkcí je situace při použití Fubiniovy věty poněkud jiná.

5,96.° Je-li $x \in (0,1)$ racionální číslo, $x = \frac{p}{q}$ /p,q nesoudělná, $q > 0$), položme $\varphi(x) = q$. Dále položme $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Definujme funkci f na množině $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ takto:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi(x)} + \dfrac{1}{\varphi(y)} & \text{jsou-li } x,y \text{ racionální,} \\ 0 & \text{jinde v } M . \end{cases}$$

Ukažte, že

1/ f je nespojitá ve všech bodech množiny M majících obě souřadnice racionální,

2/ f je spojitá ve všech ostatních bodech množiny M /porovnejte s př. 2,32/,

3/ $(L) \iint_M f = 0$,

4/ $(R) \iint_M f = 0$,

5/ $(R) \int_0^1 \left((R) \int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy$, $(R) \int_0^1 \left((R) \int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$ neexistují.

5,97.° Definujme nyní funkci g na množině $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ takto:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x,y \text{ racionální, } \varphi(x) = \varphi(y) \text{ /viz př. 5,96/,} \\ 0 & \text{jinde v } M . \end{cases}$$

Ukažte, že

1/ $(L) \iint_M g = 0$,

2/ $(R) \iint_M g$ neexistuje ,

3/ $(R) \int_0^1 \left((R) \int_0^1 g(x,y)\, dx \right) dy = (R) \int_0^1 \left((R) \int_0^1 g(x,y)\, dy \right) dx = 0.$

5,98.° Definujme funkci h na množině $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ předpisem :

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální}, \ y \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle \text{ libovolné anebo je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální}, \ y \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle \text{ libovolné}, \\ 0 & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální}, \ y \in (\frac{1}{2}, 1\rangle \text{ anebo je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální}, \ y \in \langle 0, \frac{1}{2}) . \end{cases}$$

Ukažte, že

1/ $(R)\int_0^1 ((R)\int_0^1 h(x,y)\,dy)\,dx = \frac{1}{2}$,

2/ $(R)\int_0^1 ((R)\int_0^1 h(x,y)\,dx)\,dy$ neexistuje ,

3/ $(R)\iint_M h$ neexistuje ,

4/ $h \in \Lambda_M$,

5/ $(L)\iint_M h = \frac{1}{2}$.

5,99. Buď $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$, potom

$$\iint_M (xy)^{xy}\,dxdy = \int_0^1 z^z\,dz \ . \quad \text{Dokažte !}$$

‖ Použijte Fubiniovu větu, substituci $xy = t$ a větu o integraci per partes . ‖

5,100. Buďte $f,g \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom

$$\left(\int_a^b f.g\right)^2 \leqq \int_a^b f^2 \ . \int_a^b g^2 \ . \quad \text{Dokažte !}$$

/Tzv. Cauchy - Bunjakovského nerovnost./

‖ Použijte nerovnost /$M = \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle$ /

$$0 \leq \iint_M (f(x)\,g(y) - f(y)g(x))^2\,dx\,dy =$$
$$= 2\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 - 2\left(\int_a^b f \,.\, g\right)^2 . \text{‖}$$

5,101. Buď f kladná a měřitelná v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f \ . \int_a^b \frac{1}{f} \geqq (b-a)^2 \ . \quad \text{Dokažte !}$$

‖ Dokažte přímo anebo pomocí cv. 5,100 . ‖

5,102. Buď f spojitá a nezáporná v intervalu (a,b). Buď

$$M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \in (a,b) \, , \; 0 \leq y \leq f(x)\} \, .$$

Potom $M \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 M = \int_a^b f(x)\, dx$. Dokažte !

‖ Viz též větu 62 . ‖

5,103. ** Budeme se nyní zabývat otázkou, kdy nějaká množina $N \subset E_r$ má Lebesgueovu míru nula. Především víme podle věty 62, že "graf" každé spojité funkce r-1 proměnných má v E_r nulovou míru. Předpoklad spojitosti funkce f ve větě 62 je zbytečně silný, v dalším vyslovíme daleko obecnější větu.

I/ Buď $M \subset E_r$, $M \in \mathfrak{M}_r$, nechť $f \in \Lambda_M$. Označíme-li

$$M_1 = \{[x,y] \in E_{r+1} \; ; \; x \in M \, , \; y \in E_1 \, , \; y < f(x)\} \, ,$$

$$M_2 = \{[x,y] \in E_{r+1} \; ; \; x \in M \, , \; y \in E_1 \; ; \; y > f(x)\} \, ,$$

$$\mathrm{graf}_M f = \{[x,y] \in E_{r+1} \; ; \; x \in M \, , \; y \in E_1 \, , \; y = f(x)\} \, ,$$

jest M_1, $M_2 \in \mathfrak{M}_{r+1}$, $\mathrm{graf}_M f \in \mathfrak{M}_{r+1}$.

Zhruba řečeno - graf měřitelné funkce je měřitelná množina.

‖ Viz V.Jarník, Integrální počet II, věta 75 . ‖

II/ Nechť jsou splněny předpoklady z I/. Potom

$$\mu_{r+1} (\mathrm{graf}_M f) = 0 \, .$$

Toto jest tedy slíbené zobecnění věty 62.

‖ Použijte Fubiniovu větu . ‖

Velmi často se stává, že množina $N \subset E_r$ je definována jako množina bodů $[x_1,\dots,x_r] \in E_r$, které vyhovují nějaké rovnici $F(x_1,\dots,x_r) = 0$ nebo je část takové množiny. Zajímá nás, za jakých předpokladů bude množina N nulová. Dokažte následující větu /viz V.Jarník, Integrální počet II, kap. VII, §2, poznámka 3/.

III/ Nechť reálná funkce $F(x_1,\dots x_r)$ má v otevřené množině $S \subset E_r$ konečné spojité parciální derivace až do řádu n-tého /$n > 0$/.
Buď $N = \{x \in S \; ; \; F(x) = 0\}$, buď N_n množina těch bodů $x \in S$, v nichž funkce F i všechny její derivace až do n-tého řádu jsou rovny nule.
Potom N, $N_n \subset \mathfrak{M}_r$ a $\mu_r(N - N_n) = 0$
/tedy je-li $\mu_r N_n = 0$, je $\mu_r N = 0$ / .

Na základě této věty /či též podle věty 62/ ukažte, že následující množiny jsou nulové:

a/ $N = \{[x_1,\dots,x_r] \in E_r \ ; \ a_1x_1 + \dots + a_rx_r = b\}$,

$$a_1^2 + \dots + a_r^2 > 0 ,$$

b/ $N = \{[x_1,\dots,x_r] \in E_r \ ; \ x_1^2 + \dots + x_r^2 = R^2\}$, $R > 0$,

c/ $N = \{[x_1,\dots,x_r] \in E_r \ ; \ P(x_1,\dots,x_r) = 0\}$, kde

$P(x_1,\dots,x_r)$ je reálný polynom n-tého stupně takový, že alespoň jeden člen tvaru $ax_1^{k_1}\dots x_r^{k_r}$ $/k_1+\dots+k_r = n/$ má koeficient $a \neq 0$,

speciálně např.

1/ $N = \{[x,y] \in E_2 \ ; \ (x+y^2)^2 - x^3 - y^3 = 0\}$,

2/ $N = \{[x,y] \in E_2 \ ; \ x + y^2 = \sqrt{x^3 + y^3}\}$,

3/ $N = \{[x,y] \in E_2 \ ; \ x^2 + y^2 = 2a(x^2 - y^2)\}$,

4/ předchozí příklady aj.

d/ $N = \{[x,y] \in E_2 \ ; \ 4y \sin x - \arcsin xy = 0\}$.

5,104.* Buď $K_r = \{[x_1,\dots,x_r] \in E_r \ ; \ x_1^2 + \dots + x_r^2 \leq 1\}$ /jednotková koule v E_r /. Ukažte, že

$$\mu_{2r}(K_{2r}) = \frac{\pi^r}{r!} , \qquad \mu_{2r+1}(K_{2r+1}) = \frac{2\,.(2\pi)^r}{1.3.5.\dots(2r+1)} .$$

Čemu je rovna limita $\lim_{r\to+\infty} \mu_r K_r$?

5,105. Dokažte následující tvrzení:

a/ $f \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)} \Rightarrow \int_0^\infty f(x + \sqrt{x^2+1})\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_1^\infty f(x)dx + \int_0^1 f(\frac{1}{x})dx\right]$,

b/ $\int_0^\infty \frac{\log x}{x} \,.\, f(x + \frac{1}{x})\,dx = 0$, existuje-li tento integrál.

5,106. Dokažte následující tvrzení:

$M \in \mathfrak{M}_n \iff$ pro každý kompaktní interval $I \subset E_n$

je $I \cap M \in \mathfrak{M}_n$.

5,107. Definujme funkci f na množině $M = (0,1) \times (0,1)$ předpisem: $f(x,y) = \frac{1}{2}$, je-li y racionální, $f(x,y) = x$ je-li y iracionální.

Ukažte, že

1/ $f \in \mathcal{L}_M^R$, $\iint_M f = \frac{1}{2}$,

2/ označíme-li $F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$, je funkce F v intervalu $(0,1)$ spojitá, ačkoliv funkce f při pevném x není /s výjimkou $x = \frac{1}{2}$; viz též následující kapitolu/.

5,108.* Buď $M \in \mathcal{M}_r$, $N \in \mathcal{M}_s$, $f \in \mathcal{L}_M$, $g \in \mathcal{L}_N$

Definujme funkci φ na $M \times N$ předpisem

$$\varphi(x,y) = f(x) \cdot g(y) , \quad x \in M , \quad y \in N$$

/funkce f je tedy funkcí r proměnných, funkce g funkcí s proměnných a funkce φ funkcí $r + s$ proměnných/. Potom $\varphi \in \mathcal{L}_{M \times N}$ a

$$\int_{M \times N} \varphi = \int_M f \cdot \int_N g .$$

Dokažte !

25535 211