4. Integrace posloupností a řad funkcí

Nechť na množině M je dána posloupnost funkcí f_n, která na této množině konverguje k funkci f (tj. pro každé $x \in M$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$). Budeme se zabývat otázkou, za jakých předpokladů je též $\lim_{n\to\infty} A_M f_n = A_M f$. Máme přitom k disposici věty 18 (Leviho), 19 (Lebesgueova) a větu 20.

4.1. Poznámky:

a/ uvědomte si, že věta 20 je vlastně důsledek Lebesgueovy věty. Tedy – nepodaří-li se nám najít funkci $g \in \mathcal{L}_M$ (pro $\mu M < +\infty$) tak, aby pro všechna n a sk.vš. $x \in M$ platilo $|f_n| \leq g$, je zbytečné vyšetřovat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti f_n na M (f_n pak nekonvergují na M stejnoměrně – proč ?),

b/ při vyšetřování stejnoměrné konvergence posloupnosti f_n na množině M používáme následující větu:

"Nechť $f_n \to f$ na množině M, pro každé n $(n = 1,2,\dots)$ označme $\sigma_n = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$.

Potom

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 \text{"}.$$

Jak nalezneme v jednoduchém příkladě supremum funkce na množině ukazuje následující věta:

"Nechť $I \subset E_1$ je interval libovolného druhu s koncovými body a,b $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. Nechť H je spojitá funkce v intervalu I, nechť existují $\lim_{x\to a_+} H(x) = A$, $\lim_{x\to b_-} H(x) = B$. Nechť dále $\xi_1,\dots, \xi_n$ jsou všechny body intervalu I, v nichž derivace H' neexistuje anebo je rovna nule.

Označme

$$Q_x [H(x), I] \text{ množinu } \{A,B,H(\xi_1),\dots, H(\xi_n)\}.$$

Potom $\sup_{x\in I} H(x) = \max Q_x [H(x), I]$."

K této větě jen dvě stručné poznámky:

1/ je-li $I = \langle a,b\rangle$, píšeme krátce $A = H(a)$, $B = H(b)$; víme, že v tomto případě funkce H nabývá v intervalu I svého maxima (které tedy může nabývat buďto v krajních bodech intervalu I anebo v bodech kde je první derivace rovna nule či neexistuje).

2/ neexistují-li $\lim_{x\to a_+} H(x)$, $\lim_{x\to b_-} H(x)$, zůstává věta v platnosti, položíme-li $A = \limsup_{x\to a_+} H(x)$, $B = \limsup_{x\to b_-} H(x)$, 3/ při použití Lebesgueovy věty bývá výhodné položit

$g(x) = \sup_{n \in N} |f_n(x)|$ (kde N je množina přir. čísel)

pro každé $x \in M$. V tomto případě zvolíme $x \in M$ pevné a hledáme $\sup |f_n(x)|$ přes množinu všech přirozených čísel (anebo alespoň pro všechna $n \geqq n_0$, kde n_0 je pevné přirozené číslo). Jak postupovat v tomto případě ukážeme na příkladech.

POZOR ! - při vyšetřování stejnoměrné konvergence hledáme

$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$, kdežto při použití Lebesgueovy věty hledáme $\sup_{n \in N} |f_n(x)|$!

4,2.	Ukažte, že $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx = 0$!

1/ Pro každé $n \in N$ existuje integrál jako Riemannův i Newtonův, ukažte, že $\int_0^1 x^n n^{-1} dx = \frac{1}{n(n+1)}$, odkud plyne tvrzení.

2/ Využijte též odhadu $0 \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx \leqq \int_0^1 \frac{1}{n} dx \leqq \frac{1}{n}$.

3/ Použijte větu 20 :

a/ limitní funkce $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n} = 0$ pro každé $x \in (0,1)$,

b/ $\frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ na intervalu $(0,1)$ (zřejmě $0 \leqq \frac{x^n}{n} \leqq \frac{1}{n}$)

tedy $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n} dx = \int_0^1 0 \, dx = 0$.

(Jako cvičení ukažte, že $\sigma_n = \frac{1}{n}$!).

4/ Použijte Leviho větu:

a/ $\frac{x^n}{n} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ pro každé $n \in N$ (proč ? ! ,

b/ $\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{x^n}{n}$ pro každé $x \in (0,1)$ a každé $n \in N$.

Dokažte poslední nerovnost přímo anebo použitím tvrzení, že pro libovolné $x \in (0,1)$ je funkce $\varphi(z) = \frac{x^z}{z}$ jakožto funkce z klesající v intervalu $(1, +\infty)$.

5/ Použijte Lebesgueovu větu:

Hledáme funkci g tak, aby $g \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a byla splněna nerovnost $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leqq g(x)$ pro všechna $n \in N$ a všechna $x \in (0,1)$, stačí zřejmě položit $g = 1$ na intervalu $(0,1)$.

Zkusme spočítat $\sup_{n \in N} \frac{x^n}{n}$ pro $x \in (0,1)$

(tím vlastně dostaneme nejlepší odhad), je vidět, že $\sup_{n \in N} \frac{x^n}{n} = x$ pro $x \in (0,1)$, stačí tedy položit v Lebesgueově větě $g(x) = x$ na $(0,1)$. ||

4,3. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = 0$!

1/ Ukažte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu $0 \leqq \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^{1/n} \frac{nx\,dx}{1+n^2x^2} + \int_{1/n}^1 \frac{nx\,dx}{1+n^2x^2} \leqq$

$$\leqq \int_0^{1/n} nx\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{nx}\,dx = \frac{1}{2n} + \frac{\log n}{n}$$

3/ Zkoumejte, zda $\frac{nx}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v $(0,1)$

(nekonvergují stejnoměrně, neboť

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{0\,;\ \frac{n}{1+n^2}\,;\ \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\ )$$

4/ Použijte Lebesgueovu větu.

Z předchozího odstavce vyplývá, že

$$x\in(0,1)\ ,\quad n\in N \Rightarrow 0 \leqq \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqq \frac{1}{2}$$

stačí tedy položit $g = \frac{1}{2}$ na intervalu $(0,1)$ a ověřit podrobně předpoklady Lebesgueovy věty,

dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = 0\ .$$

Jako cvičení se pokusme nalézt "lepší" odhad, položme

$$g(x) = \sup_{n\in N}\frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{pro každé } x\in(0,1).$$

Zvolme tedy pevně $x \in (0,1)$, místo abychom počítali

$\sup_{n\in N}\frac{nx}{1+n^2x^2}$, položme pro každé $n \in \langle 1,+\infty)$ (a každé $x \in (0,1)$

$$H_x(n) = \frac{nx}{1+n^2x^2}\ .$$

Zde tedy považujeme n za "spojitě" proměnnou a hledejme

$$G(x) = \sup_{n\in\langle 1,\infty)}\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

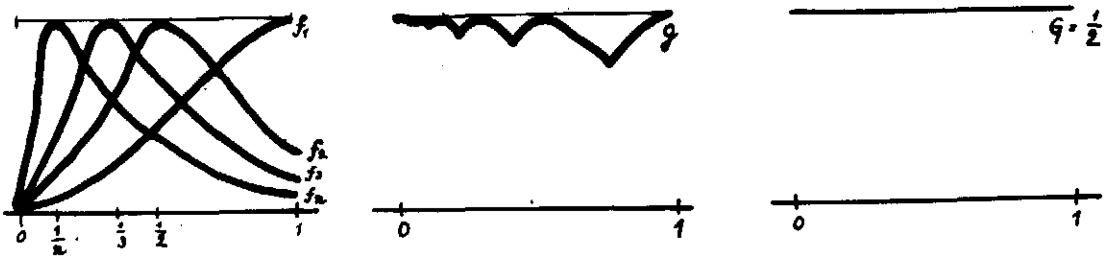
Odůvodněte, proč $g(x) \leqq G(x)$ pro každé $x \in (0,1)$!

Opět zjistěte, že

$$\sup_{n\in\langle 1,\infty)}\frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{\frac{x}{1+x^2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\ .$$

Žádný "lepší" odhad jsme tedy neobdrželi. Uvědomte si, že funkce G není "nejlepším" odhadem, je to způsobeno tím, že místo abychom vyšetřovali supremum přes množinu všech přirozených čísel N , vyšetřovali jsme vlastně supremum přes množinu všech reálných čísel v intervalu $\langle 1, +\infty)$ (podrobně rozmyslete !). Kdyby tedy vyšlo $\int_0^1 G = +\infty$, stále by mohlo být $\int_0^1 g < +\infty$.

Viz následující obrázek:



Obrázek č.4

5/ Ukažte, že nelze přímo použít Leviho větu .

4,4.	Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}\,.\,x}{1+n^2x^2}\,dx = 0$!

1/ Ověřte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu

$$0 \leq n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{x}{1+n^2x^2}\,dx \leq n^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{1/n} x\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{n^2x}\,dx \right) =$$

$$= n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{\log n}{n} \right) .$$

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2}$ nekonverguje stejnoměrně k nule v intervalu (0,1) jest

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} = \max\left\{ 0 ; \frac{\sqrt{n^3}}{1+n^2} ; \frac{\sqrt{n}}{2} \right\} .$$

4/ Ukažte, že jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty, jest

$$\sup_{n\in N} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} \leq \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} = \max\left\{ \frac{x}{1+x^2} ; 0; \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\sqrt{x}} \right\} =$$

$$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4.\sqrt{x}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$$

4,5.	Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$

‖ 1/ Ukažte, že $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \longrightarrow 0$ pro $n \longrightarrow +\infty$ na intervalu $(0,1)$, ale nekonvergují tam stejnoměrně.

Poslední tvrzení dokažte

a/ tím, že ukážete $\sigma_n = \frac{1}{2}$,

b/ podrobně z následujících vztahů:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1_-} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \quad !$$

2/ Použijte Lebesgueovu větu:

"rychlý", ale "hrubý" odhad dává $0 \leqq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqq 1$ v $(0,1)$

anebo "lepší" odhad $0 \leqq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqq \dfrac{x}{1+x^2}$ pro $x \in (0,1)$, $n \in N$.

3/ Použijte Leviho větu . ‖

4,6.	Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx = 0$!

‖ 1/ Využijte odhadu

$$0 \leqq \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx \leqq \int_0^1 x^n\, dx + \int_1^\infty x^{-n}\, dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n \geqq 2 .$$

2/ Limitní funkce f : $f(1) = \frac{1}{2}$; $f = 0$ jinde v $(0, +\infty)$.

3/ Ukažte, že posloupnost $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ nekonverguje k f stejnoměrně v intervalu $(0, +\infty)$

(využijte výsledku z př. 4,5 anebo nespojitosti funkce f !)

Kdyby nicméně bylo $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \rightrightarrows f$ v $(0, +\infty)$, nemohli bychom stejně použít větu 20 (proč?).

4/ Použijte Lebesgueovu větu, vyjde

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x}{1+x^2}, \text{ tedy } g \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

(je okamžitě vidět, že $\int_0^{+\infty} f_1 = +\infty$), omezme se proto na $n \geqq 2$,

potom $\sup\limits_{n\geqq 2} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} = \dfrac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Vše si podrobně rozmyslete a proveďte !

5/ Použijte Leviho větu! ‖

4,7.	Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} = 1$!

$\|$ 1/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \underline{1}$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N \;;\; x \in (0,1) \implies \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \;,$$

$$n \geq 2 \;,\; x \in (1,+\infty) \implies \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot (\tfrac{x}{n})^j\right]^{-1} \leq \left[\tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)\, \frac{x^2}{n^2}\right]^{-1} \leq \frac{4}{x^2} \;.$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu $\underline{.}\,\|$

4,8. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos x\,dx = 0$!

$\|$ 1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0,+\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N$, $x \in (0,+\infty) \implies \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1 + x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ $\underline{\ }\|$.

4,9. Buď $0 < A < +\infty$, potom $\lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,dx = 0$.

$\|$ Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A) \;,\; n \in N \implies \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)} \;\underline{.}\,\|$$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{na} \quad M \implies \int_M f_n \longrightarrow \int_M f$$

Uveďme příklady

4,10. Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1\rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Potom a/ $f_n \longrightarrow 0$ v $\langle 0,1\rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1\rangle$?

4,11. Definujme funkce f_n na $\langle 0,1 \rangle$ jako v př. 4,10 ,

položme $g_n = (-1)^n \cdot f_n$ v $\langle 0,1 \rangle$.

Potom: a/ $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ v $\langle 0,1 \rangle$, tedy $\int_0^1 \lim g_n = 0$,

b/ $\int_0^1 g_n = \frac{(-1)^n\, 2}{\pi}$, tedy $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n$ neexistuje .

Jak je to se stejnoměrnou konvergencí posloupnosti g_n na $\langle 0,1 \rangle$?

4,12°. Nalezněte posloupnost spojitých a nezáporných funkcí f_n definovaných v E_1 tak, aby

a/ $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ v E_1 ,

b/ $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n$ neexistovala.

4,13°. Nalezněte posloupnost spojitých a nezáporných funkcí f_n definovaných v E_1 tak, aby

a/ $f_n \searrow 0$ v E_1 ,

b/ $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n \neq 0$.

Zřejmě v tomto případě vždy bude existovat $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n$ (proč ?), lze najít f_n tak, aby $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n$ byla konečná ?

[Nelze, to by byl spor s Leviho větou - odůvodněte !]

4,14. V dalším se budeme zabývat limitami integrálů "závislých" na parametru. Buď $f(x,\alpha)$ funkce dvou reálných proměnných x), předpokládejme, že pro určité hodnoty α existuje $\int_M f(x,\alpha)\,dx$ (přesněji - existuje integrál $\int_M f^{*,\alpha}(x)\,dx$; použijeme však prvního, byť ne zcela korektního označení). Je vidět, že hodnota integrálu $\int_M f(x,\alpha)\,dx$ závisí obecně na volbě parametru α (a též pochopitelně na funkci f a množině M), tedy $\int_M f(x,\alpha)\,dx$ je vlastně funkce proměnné α , značme

$$F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx .$$

Souborem otázek, kterými se budeme zabývat, je, jak vlastnosti funkce F závisejí na vlastnostech funkce f . Abychom mohli vůbec mluvit o funkci F , musíme určit, pro jaké hodnoty parametru α existuje $\int_M f(x,\alpha)\,dx$ a je konečný. Tímto jsme se zabývali v 3.kapitole, kdy jsme určovali, do jakého systému daná funkce patří. Dále nás zajímá, za jakých podmínek existuje $\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha)$, kdy je funkce F spojitá, kdy existuje $F'(\alpha)$,

---

x/ Obecně funkcemi více proměnných a případem, kdy parametr α probíhá body nějakého metrického prostoru, se zabývá kniha V.Jarníka, „Integrální počet II".

kdy $\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha$ a pochopitelně, jak se dá limita, derivace či integrál funkce F počítat. Otázkou výpočtu limity $\lim_{\alpha \to \alpha_0} F(\alpha)$ se budeme zabývat v tomto paragrafu, ostatními otázkami až v šesté kapitole.

Zopakujte si znovu Leviho a Lebesgueovu větu, které budeme v dalším používat. Rovněž tak si připomeňte následující věty (Heine):

1/ Buďte $c, A \in E_1^*$, nechť funkce f je definována v jistém redukovaném okolí bodu c. Potom

$\lim_{x \to c} f(x) = A \iff$ pro libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n \neq c$, $\alpha_n \longrightarrow c$, (pro kterou je definováno $f(\alpha_n)$) jest $\lim_{n \to \infty} f(\alpha_n) = A$.

(Vyslovte též obdobnou větu pro jednostranné limity! a uvědomte si význam této věty).

2/ Nechť funkce f je definována v intervalu (a,b), buď $A \in E_1^*$. Potom

$\lim_{x \to b_-} f(x) = A \iff$ pro libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n \neq b$, $\alpha_n \nearrow b$ jest $\lim_{n \to \infty} f(\alpha_n) = A$.

V čem spočívá rozdíl obou vět?

Uveďme nyní jednoduchý příklad.

$\boxed{4,15. \text{ Vyšetřujte } F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx \ !}$

1/ Ukažte, že $e^{-\alpha x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \iff \alpha \in (0,+\infty)$,

viz př. 3,32. "Definičním oborem" funkce F jest tedy interval $(0,+\infty)$.

2/ Spočteme $\lim_{\alpha \to 0_+} F(\alpha)$.

Zvolme tedy libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \searrow 0$ a pro každé $x \in (0,+\infty)$ a každé n $(n = 1,2,3,\dots)$ položme

$$f_n(x) = e^{-\alpha_n x^2} .$$

Zřejmě $f_n \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ (proč?), $f_n > 0$ v $(0,+\infty)$, dále pro každé $x \in (0,+\infty)$ jest $f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x) \leqq \dots$.

Odtud podle Leviho věty dostáváme (prověřte detailně!), že

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx \text{, tedy}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty e^{-\alpha_n x^2}\,dx = \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} e^{-\alpha_n x^2}\,dx = \int_0^\infty 1\,dx = +\infty .$$

Podle předešlé poznámky je tudíž

$$\lim_{\alpha \to 0_+} F(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0_+} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = +\infty .$$

Mohli jsme při výpočtu $\lim_{\alpha \to 0_+} F(\alpha)$ použít též Lebesgueovu větu?

3/ Dokážeme, že $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$.

a/ Zvolme libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \longrightarrow +\infty$ (nemusí být monotonní!), předpokládejme například, že $\alpha_n \geq 7$ (proč to můžeme předpokládat?). Položme opět

$$f_n(x) = e^{-\alpha_n x^2} \quad \text{pro } x \in (0,+\infty), \quad n = 1,2,\dots$$

Zřejmě opět $f_n \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ (proč?) a pro každé $n \in N$ a každé $x \in (0,+\infty)$ platí $0 \leq f_n(x) \leq e^{-7x^2}$.

Protože $e^{-7x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte jako v př. 3,32), jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty a tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx, \text{ tedy}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha_n x^2}dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha_n x^2}dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0.$$

Opět vidíme, že $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = 0$.

b/ Použijte při důkazu vztahu $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$ Leviho větu.

4/ Výsledek porovnejte se cvičením 5,84 b, podle kterého je

$$F(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{pro } \alpha \in (0,+\infty).$$

5/ Při důkazu $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$ můžeme též použít nerovnosti

$$\alpha \in (0,+\infty),\ x \in (0,+\infty) \implies e^{-\alpha x^2} \leq e^{-\alpha(2x-1)}$$ (viz př. 3,32).

Postup při výpočtu shora uvedených limit nás vede ke dvěma následujícím větám, které si snadno sami dokážete.

4,16.° Viz též V. Jarník, Integrální počet II, věta 106).

Buď $M \subset E_1$ měřitelná množina, buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nechť funkce $f(x,\alpha)$ je definována v $M \times (a,b)$.

Nechť platí:

1/ Pro sk.vš. $x \in M$ existuje $\lim_{\alpha\to b_-} f(x,\alpha) = \varphi(x)$,

2/ pro každé $\alpha \in (a,b)$ je $f^{*,\alpha} \in \Lambda_M$ (tj. nepřesněji - funkce $f(x,\alpha)$ jakožto funkce x je měřitelná v M),

3/ existuje funkce $g \in \mathcal{L}_M$ tak, že nerovnost

$|f(x,\alpha)| \leq g(x)$ je splněna pro všechna $\alpha \in (a,b)$ a pro sk.vš. $x \in M$.

Potom je $\varphi \in \mathcal{L}_M$ a platí

$$\lim_{\alpha\to b_-} \int_M f(x,\alpha)\,dx = \int_M \varphi(x)\,dx.$$

(Je-li $b = +\infty$, rozumíme pochopitelně symbolem $\alpha \to b_-$ symbol $\alpha \longrightarrow +\infty$). Vyslovte obdobnou větu pro limitu zprava!

$\boxed{4{,}17^{\circ}}$ (Viz též V.Jarník, Integrální počet II. str. 300).

Buď $M \subset E_1$ měřitelná množina, buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nechť funkce $f(x,\alpha)$ je definována v $M \times (a,b)$.

Nechť platí:

1/ pro sk.vš. $x \in M$ existuje $\lim_{\alpha \to b_-} f(x,\alpha) = \psi(x)$,

2/ pro každé $\alpha \in (a,b)$ je $f^{*\mu} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_M$

3/ pro sk.vš. $x \in M$ je $f(x,\alpha) \leq f(x,\beta)$, kdykoliv $a < \alpha \leq \beta < b$.

Potom je $\psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_M$ a platí

$$\lim_{\alpha \to b_-} \int_M f(x,\alpha)\,dx = \int_M \psi(x)\,dx .$$

Důkazy těchto vět jsou vlastně jednoduchými důsledky Lebesgueovy a Leviho věty. Tyto věty si nemusíme pamatovat, v praxi můžete vždy postupovat jako v příkladu 4,15 - což nebylo vlastně nic jiného než důkazy vět 4,16 a 4,17 .

4,18. Spočtěte limity funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ v krajních bodech jejího "definičního oboru".

‖ 1/ Zjistíme, že $\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ je konečný, právě když $s \in (0,+\infty)$. (Viz př. 3,43).

2/ Dokažte, že $\lim_{s \to \infty} \Gamma(s) = +\infty$.

Zvolme libovolnou posloupnost s_n, $s_n \nearrow +\infty$. Potom

$x \in (0,1) \Rightarrow x^{s_1-1} e^{-x} \geq x^{s_2-1} e^{-x} \geq x^{s_3-1} e^{-x} \geq \ldots \geq 0$,

$x \in (1,+\infty) \Rightarrow 0 \leq x^{s_1-1} \cdot e^{-x} \leq x^{s_2-1} \cdot e^{-x} \leq x^{s_3-1} e^{-x} \leq \ldots$

Odtud je vidět, že nelze použít Leviho větu (posloupnost funkcí $x^{s_n-1} e^{-x}$ není monotonní v celém intervalu $(0,+\infty)$) ani Lebesgueovu větu $\left(\sup_{n \in N} x^{s_n-1} e^{-x} = +\infty\right.$ pro $x \in (1,+\infty)$).

Nicméně lehko zjistíte (proveďte podrobně ! , pokud možno podle obou vět), že

$$\lim_{s \to +\infty} \int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx = 0 , \quad \lim_{s \to +\infty} \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx = +\infty ,$$

tedy $\lim_{s \to \infty} \Gamma(s) = +\infty$.

3/ Obdobně dokažte, že $\lim_{s \to 0_+} \Gamma(s) = +\infty$. ‖

4,19. Dokažte, že $\lim_{\alpha \to 1_-} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(\alpha - \sin x)} = -\infty$!

‖ Zvolte libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n \in (\frac{9}{10}, 1)$, $\alpha_n \nearrow 1$.

Potom $0 \geq \frac{1}{\log(\alpha_1 - \sin x)} \geq \frac{1}{\log(\alpha_2 - \sin x)} \geq \ldots$ pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

Podle Leviho věty (provádějte vše podrobně !) jest

$$\lim_{\alpha\to 1_-} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(\alpha - \sin x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(1-\sin x)} \quad \text{a}$$

poslední integrál je roven $-\infty$. ||

Lze v tomto příkladě též užít Lebesgueovu větu?

4,20. Ukažte, že $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx = 0$ pro libovolné $a \in E_1$!

|| Zvolte posloupnost k_n , $k_n > 0$, $k_n \nearrow +\infty$. Ukažte, že posloupnost funkcí $e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x}$ není monotonní v intervalu $(0,+\infty)$, nelze tedy užít přímo Leviho větu.

Zřejmě však platí

$$\left| e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| \leqq e^{-k_1 x} \frac{|\sin ax|}{x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

tedy Lebesgueova věta dává

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} e^{-k_n x} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0 .$$

Příklady tohoto druhu však nemusíme vždy řešit automaticky pomocí Leviho či Lebesgueovy věty, leckdy můžeme postupovat přímo.

Ke příkladu, položíme-li $C(a) = \max_{x\in(0,+\infty)} \frac{|\sin ax|}{x}$ pro $a \in E_1$,

jest

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx \right| \leqq \int_0^{\infty} \left| e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| dx \leqq C(a) \int_0^{\infty} e^{-kx}\, dx = \frac{C(a)}{k} ,$$

odkud snadno plyne naše tvrzení . ||

4,21. Dokažte, že $\lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx = 0$!

|| 1/ Ukažte, že $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow \alpha \in \langle 0,+\infty)$.

2/ použijte Lebesgueovu i Leviho větu ,

3/ využijte též odhadu

$$0 \leqq \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx \leqq \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \quad . ||$$

4,22. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n}\, dx = 1$!

|| 1/ Použijte Lebesgueovu větu a vztahu

$$n \geqq 1,\ x \in (0,+\infty) \Longrightarrow e^{-x^n} \leqq \phi(x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

kde $\phi(x) = 1$ pro $x \in (0,1\rangle$, $\phi(x) = e^{-x}$ pro $x \in (1,+\infty)$,

2/ použijte Leviho větu - tuto nemůžete použít přímo na celý interval $(0,+\infty)$, ale lehko ji lze aplikovat zvláště na intervaly $(0,1)$ a $(1,+\infty)$, zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-x^n}\,dx = 1 , \quad \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty e^{-x^n}\,dx = 0 . \;\|$$

| 4,23. | Řešte následující příklady .

1/ Zkoumejte, zda lze provést limitní přechod za integračním znamením v následujících příkladech (tj. zkoumejte, zda platí

$$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \;) \quad :$$

a/ $f_n(x) = 1$ pro $x \in (n,+\infty)$, $f_n(x) = 0$ jinde v E_1 , $M = E_1$,

b/ $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $M = \langle 0,1\rangle$,

c/ $f_n(x) = n\, x^{-nx^2}$, $M = (0,1)$,

d/ $f_n(x) = nx\, e^{-nx^2}$, $M = (0,1)$, $(1,+\infty)$, $(0,+\infty)$

2/ Spočítejte následující limity:

a/ $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^\infty e^{-xy} \cos x\,dx$,

b/ $\lim\limits_{a\to 0_+} \int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$,

c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt$, 3/ Ukažte, že

$$\lim_{a \to 0_+} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2ax) \log \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \sin x \, dx \, .$$

4/ Buď $f \in \mathcal{L}_M$, $\varphi \in \Lambda_M$, potom

$$\lim_{n \to +\infty} \int_M f(x) \, . \, \mathrm{arctg} \, [n \, \varphi(x)] \, dx = \int_M f(x) \, . \lim_{n \to +\infty} \mathrm{arctg} [n \, \varphi(x)] \, dx \, .$$

Dokažte ! Čemu je rovna poslední limita ?

5/ Buď $M = \{[x,y] \in E_2 \, ; \; x \in (0,2) \, , \; y \in \langle 0,1 \rangle \}$. Potom

$$\lim_{n \to +\infty} \iint_M \mathrm{arctg} \, n \, (x^2 - y^2) \, dxdy = \frac{\pi}{2} \, .$$

6/ Buď K množina všech racionálních čísel intervalu $(0,1)$, nechť $K = \{ r_1 , r_2 , r_3 , \dots \}$. Označme $K_n = \{r_1, \dots, r_n\}$, $f_n = c_{K_n}$ /f_n je tedy charakteristická funkce množiny K_n /. Buď D Dirichletova funkce v intervalu $(0,1)$ /viz 2,31/. Dokažte, že

a/ $f_n \in Z^K$,

b/ $f_n \nearrow D$ v $(0,1)$,

c/ funkce f_n jsou spojité v E_1 až na konečný počet bodů, existují tedy (R) $\int_0^1 f_n$, (ZN) $\int_0^1 f_n$,

d/ (R) $\int_0^1 f_n =$ (ZN) $\int_0^1 f_n = 0$,

e/ neexistují (R) $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$, (ZN) $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n$.

Lze použít v tomto případě Leviho větu pro Lebesgueovy integrály, tj. platí $\lim_{n\to\infty}$ (L) $\int_0^1 f_n =$ (L) $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$?

Může být $f_n \in Z^R$?

7/ Předpokládejme, že funkce f_n /n = 1,2,.../ i funkce f jsou riemannovsky integrovatelné na $\langle a,b \rangle$ /tj. existují (R) $\int_a^b f_n$, (R) $\int_a^b f$ /. Předpokládejme, že existuje $K \in E_1$ tak, že $|f_n(x)| \leq K$ pro každé $x \in \langle a,b \rangle$ a každé $n \in N$. Nechť dále $f_n \to f$ na $\langle a,b \rangle$.

Platí potom, že

$$(R)\int_a^b f_n \longrightarrow (R)\int_a^b f \quad ?$$

Co lze říci v případě, vynecháme-li předpoklad existence (R) $\int_a^b f$?

8/ Nechť f_n jsou spojité funkce v intervalu $\langle 0,1 \rangle$,

95535 P5

$f_n \rightrightarrows f$ v $\langle 0,1\rangle$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n = \int_0^1 f .$$

Dokažte ! Lze větu zobecnit ?

9/ Nechť $f_n \sim 0$ v množině M , $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ v M . Potom $f \sim 0$ v M . Dokažte !

10/ Nechť f_n , $f \in \mathcal{L}_M$, $\int_M |f_n - f| \longrightarrow 0$. Potom $\int_M f_n \longrightarrow \int_M f$, dokažte !

$$\left|\int_M f_n - \int_M f\right| = \left|\int_M f_n - f\right| \leq \int_M |f_n - f| .$$

V dalším se budeme zabývat integrací řady funkcí. Nechť na množině M je dána řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, nechť pro každé $x \in M$ existuje součet $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ (konečný nebo nekonečný), označme $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ na M . Budeme se zabývat otázkou, za jakých předpokladů je

$$\int_M v = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n , \quad \text{tj.}$$

kdy platí $$\int_M \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n .$$

Máme opět k disposici hlavně věty 21 (Leviho), 22 (Lebesgueova) a větu 23. Opět si uvědomte, že věta 23 je důsledek věty 22 !

4,24. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1 + x)}{x}\, dx = \frac{\pi^2}{12}$!

1/ Nejdříve vždy zkoumejte existenci tohoto integrálu (jako cvičení, neboť pro vlastní použití vět 21 - 23 je to zbytečné). Ukažte, že tento integrál existuje jako Riemannův.

2/ Pro $x \in (0,1)$ jest

$$\log(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(rozvoj funkce $\log(1+x)$; tento rozvoj odvoďte

a/ pomocí Taylorova rozvoje,

b/ ze vztahu $\left[\log(1 + x)\right]' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^n$)

tedy $$\frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1+n}$$

25535 Z6

3/ Položte $v_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ a ukažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $(0,1)$. K důkazu tohoto tvrzení použijte například Dirichletova kriteria, kde položíte

$$a_n(x) = (-1)^n \ , \quad b_{n(x)} = \frac{x^n}{n+1} \quad \text{pro } x \in (0,1) \ ;$$

musíme ověřit, že

a/ $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \ldots \geq 0$ pro $x \in (0,1)$,

b/ funkce b_1 je omezená na $(0,1)$,

c/ $b_n \rightrightarrows 0$ v $(0,1)$ (odhad $|b_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$!),

d/ existuje takové $C > 0$, že

$$\left| \sum_{n=0}^{K} a_n(x) \right| \leq C \text{ pro všechna } x \in (0,1) \text{ a všechna } K \in N .$$

4/ Použitím věty 23 dostáváme tedy

a/ $\frac{\log(1+x)}{x} \in \mathscr{L}_{(0,1)}$,

b/ $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

a použijeme-li výsledku cvičení 5,85 , dostáváme

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12} \ .$$

4,25. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$!

1/ Jako cvičení ukažte přímo, že integrál konverguje.

2/ Ukažte, že platí

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{\log(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^{n-1}}{n} \ .$$

3/ Použijte Leviho větu 21 (předpoklady podrobně ověřte!), dostáváte tvrzení

a/ $\frac{\log(1-x)}{x} \in \mathscr{L}^K_{(0,1)}$,

b/ $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$,

použijeme-li opět výsledku z př. 5,85 .

(Zároveň jsme tím ukázali, že $\frac{\log(1-x)}{x} \in \mathscr{L}_{(0,1)}$) .

4,26. Ukažte, že $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\,dx$ konverguje !

1/ Dokažte přímo metodami jako v 3. kapitole.

2/ Ukažte, že platí

$$x \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \cdot \left(\frac{1}{1 - e^{-x}}\right) = xe^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-(n+1)x} ,$$

tedy podle Leviho věty (proveďte podrobně !)

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty xe^{-(n+1)x}\,dx .$$

Jak nyní spočítáme $\int_0^\infty xe^{-(n+1)x}\,dx$?

Víme, že existuje jako Lebesgueův (proč?), lehko jej spočítáme podle věty o integraci per partes (věta 70 - uvědomte si, že nemáme k disposici větu o integraci per partes pro Lebesgueovy integrály!) jako Newtonův, tedy

$$(L) \int_0^\infty xe^{-(n+1)x}\,dx = (N) \int_0^\infty x\,e^{-(n+1)x}\,dx = \frac{1}{(n+1)^2} .$$

Konečně tedy dostáváme - opět s použitím př. 5,85

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Tím jsme ukázali konvergenci tohoto integrálu a navíc jej i spočítali.

4,27. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}$!

1/ Opět nejdříve ukažte - čistě jako cvičení - že

$$\frac{x}{e^x + 1} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

2/ Jako v minulém příkladu ukažte, že

$$x \in (0,+\infty) \Rightarrow \frac{x}{e^x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, xe^{-(n+1)x} .$$

Leviho větu nyní použít nemůžeme (proč?), ověříme, že jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty 22 :

a/ $(-1)^n \cdot x\,e^{-(n+1)x} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ (proč?) , b/ potřebujeme odhadnout částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x\, e^{-(n+1)x}$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x\, e^{-(n+1)x}\right| \leq \sum_{n=0}^{N}\left|(-1)^n x\, e^{-(n+1)x}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} x\, e^{-(n+1)x}$$

(důkladně si tento obrat promyslete !).

Avšak podle minulého cvičení víme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\, e^{-(n+1)x} = \frac{x}{e^x - 1} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} .$$

Volíme-li tedy $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty a jest

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^n x\, e^{-(n+1)x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} .$$

4,28. Buď $q > 0$, $p > 0$, potom $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 + x^q}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p + nq}$!

1/ Je-li $q > 0$, potom integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 + x^q}\, dx$ konverguje, právě když $p > 0$. Dokažte přímo jako cvičení !

2/ Použijte následující úpravy

$$\frac{x^{p-1}}{1 + x^q} = (1 - x^q) \cdot x^{p-1} \cdot \frac{1}{1 - x^{2q}} = (1-x^q)x^{p-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2nq}$$

a Leviho věty (proveďte podrobně !) .

3/ Zkusme daný integrál spočítat pomocí Lebesgueovy věty.

Pro $x \in (0,1)$ platí

$$\frac{x^{p-1}}{1 + x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{p-1+nq} .$$

Potřebujeme hlavně odhadnout částečné součty, pokusme se o to stejně jako v minulém příkladě 4,27 , dostáváme

$$\left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{p-1+nq}\right| \leq \sum_{n=0}^{N}\left|(-1)^n x^{p-1+nq}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{p-1+nq} = \frac{x^{p-1}}{1 - x^q}$$

položíme-li nyní pro $x \in (0,1)$ $g(x) = \dfrac{x^{p-1}}{1 - x^q}$, je sice funkce g majoranta pro částečné součty, ale není již $g \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ (ukažte!) .

Je to způsobeno tím, že náš odhad byl příliš "hrubý", odhadněme proto částečné součty "jemněji".

$$\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{p-1+nq}\right| = \left|x^{p-1}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n . x^{nq}\right| = \left|x^{p-1} . \frac{1-(-x)^{Nq+1}}{1+x^q}\right| \leq$$

$$\leq x^{p-1}\frac{2}{1+x^q}$$

a poslední funkce již leží v systému $\mathscr{L}_{(0,1)}$.

Můžeme tedy použít Lebesgueovu větu,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{p-1+nq}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq} \ . \rfloor\!|$$

| 4,29. | **Poznámky** k příkladu 4,28:

1/ Ukažte, že funkce $\dfrac{x^{p-1}}{1-x^q} \in \mathscr{L}^R(0,1) - \mathscr{L}(0,1)$.

⌈ a/ Dokažte toto tvrzení přímo,

b/ dokažte tvrzení též pomocí Leviho věty:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x^q}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{p-1+nq}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{p-1+nq}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p+nq} = +\infty \ . \rfloor\!|$$

2/ Zkusme do daného integrálu a řady dosadit určité hodnoty p,q - dostáváme:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots \qquad (p=q=1) ,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots \qquad (p=1,\ q=2).$$

3/ Ukažte, že $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{p-1+nq}$ nekonverguje stejnoměrně v $(0,1)$, nemohli jsme tudíž užít větu 23

⌈ kdyby daná řada konvergovala stejnoměrně v $(0,1)$ musela by konvergovat řada $\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 1_-}(-1)^n x^{p-1+nq} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. ⌋|

4,30.	Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} . \cos\sqrt{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n . \frac{n!}{(2n)!}$!

⌈ 1/ Lehko ukážete, že integrál konverguje.

2/ Použijte vztahu

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n . \frac{y^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{pro } y \in E_1$$

a ukažte, že

$$e^{-x} . \cos\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-x} . \frac{x^n}{(2n)!} \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty).$$

3/ Použijte Lebesgueovu větu, jest

$$\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!} .$$

Položte $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!}$ a ukažte, že $g\in\mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

(poslední tvrzení plyne například z Leviho věty -

$$\int_0^{\infty} g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$$

a poslední řada konverguje, jak zjistíte lehko např. pomocí d'Alembertova kriteria anebo odhadem $\frac{n!}{(2n)!} \leq 2^{-n}$) .

$$\text{Tedy}\quad \int_0^{\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}(-1)^n e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n!}{(2n)!} ,$$

kde jsme použili, že $\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^n\,dx = n!$ (odůvodněte!) ‖

$\boxed{4,31.^{0}}$ Poznámka.

Funkci g pro použití Lebesgueovy věty jsme hledali v příkladech 4,27, 4,28 a 4,30 ve tvaru $g = \sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$. Bylo-li $g\in\mathcal{L}_M$, mohli jsme použít Lebesgueovu větu, vyšlo-li $\int_M g = +\infty$ (např. v 4,28), museli jsme volit lepší "jemnější" odhad či postupovat jinak. Používáme tedy vlastně tuto větu (viz větu 3,5 skript Černý - Mařík):

"Buďte $v_n\in\Lambda_M$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_M|v_n| < +\infty$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ konverguje absolutně sk.vš., $\sum_{n=1}^{\infty} v_n\in\mathcal{L}_M$ a $A_M\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$."

Dokažte ji !

$\boxed{4,32.}$ Ukažte, že $\int_0^1 x^p\cdot\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{(p+1)^2}$ pro $p+1>0$.

‖ Lehko zjistíte, že integrál existuje jako Lebesgueův, pomocí věty o integraci per partes pro Newtonovy integrály jej pak spočítáte jako Newtonův . ‖

$\boxed{4,33.}$ Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$!

‖ 1/ Substitucí (ať již použijete větu pro Lebesgueovy či Newtonovy integrály) se převede na integrál z př. 4,25 . Proveďte detailně !

2/ Integrál spočtěte též pomocí Leviho věty, vztahu

$$\frac{\log x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \log x \qquad \text{pro} \quad x \in (0,1)$$

a příkladu 4,32 .

4,34. Dokažte, že

a/ $$\int_0^1 \frac{x.\log \frac{1}{x}}{1-x}\,dx = \frac{\pi^2}{6} - 1 ,$$

b/ $$\int_0^1 \frac{x^2.\log \frac{1}{x}}{1-x}\,dx = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2} ,$$

c/ $$\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1+x}\,dx = \frac{\pi^2}{12} ,$$

d/ $$\int_0^1 \frac{x.\log \frac{1}{x}}{1+x}\,dx = 1 - \frac{\pi^2}{12} ,$$

e/ $$\int_0^1 \frac{x^2.\log \frac{1}{x}}{1+x}\,dx = \frac{\pi^2}{12} - 1 + \frac{1}{2^2} \;!$$

4,35. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \log \frac{1}{1-x}\,dx = 1$

1/ Integrál spočtěte jako Newtonův - per partes.

2/ Použijte též Leviho větu a vztah

$$\log \frac{1}{1-x} = -\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{pro} \quad x \in (0,1).$$

Nezapomeňte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

4,36. Dokažte, že

a/ $$\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8} ,$$

b/ $$\int_0^1 \frac{x.\log \frac{1}{x}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{24} ,$$

c/ $$\int_0^1 \frac{x^2.\log \frac{1}{x}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8} - 1 \;!$$

Ve všech příkladech použijte

1/ rozvoj funkce $\frac{1}{1-x^2}$, Leviho větu a příklad 4,32 ,

2/ anebo vztahu

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \text{ a}$$

výsledků příkladů 4,33 a 4,34 .

4,37.	Dokažte, že $\int_0^1 \log x \cdot \log(1-x)\, dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}$

Použijte Leviho větu, dostanete

$$\int_0^1 \log x \cdot \log(1-x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^k \cdot \log x\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

4,38.	Dokažte, že $\int_0^1 \log x \cdot \log(1+x)\, dx = 2 - 2\log 2 - \frac{\pi^2}{12}$

Použijte vztahu

$$x \in (0,1) \Rightarrow \log x \cdot \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \cdot \log x .$$

1/ Dále použijeme Lebesgueovu větu (či vztahu z poznámky 4,31), dostáváme

$$\left| \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \cdot \log x \right| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \cdot \log x = \log x \cdot \log(1-x) \in$$

$$\in \mathcal{L}_{(0,1)}$$

(podle příkladu 4,37) anebo

2/ použijeme větu 23 - ukažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \cdot \log x$ konverguje stejnoměrně v $(0,1)$. K důkazu posledního tvrzení použijte Dirichletova kriteria, kde položíte

$$a_n(x) = (-1)^n \quad , \qquad b_n(x) = -\frac{x^n}{n} \cdot \log x ,$$

anebo použijte Weierstrasova kriteria

(ukažte, že $\left| (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \cdot \log x \right| \leqq \frac{1}{k^2}$ v $(0,1)$) .

V každém případě obdržíte, že

$$\int_0^1 \log x \cdot \log(1+x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot (k+1)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) . (-1)^k = 2 - 2\log 2 - \frac{\pi^2}{12} ,$$

kde jsme použili výsledků z př. 4,29 a 5,85 . ‖

4,39. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 x.\log x \,.\, \log(1-x)\, dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 x.\log x \,.\, \log(1+x)\, dx = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2}$.

4,40. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \log\frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+k+1)^2}$ pro $p \in (-1,+\infty)$.

‖ 1/ Ukažte, že integrál pro $p > -1$ konverguje.

2/ Použijte Leviho větu, rozvoj funkce $\frac{1}{1-x}$ a příklad 4,32 . ‖

4,41. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x} \log\frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(p+k+1)^2}$ pro $p \in (-1,+\infty)$.

‖ 1/ Ukažte, že integrál pro $p > -1$ konverguje.

2/ Použijte Leviho větu a vztahu

$$\frac{x^p}{1+x} \log\frac{1}{x} = (1-x) \,.\, x^p \,.\, \log\frac{1}{x} \,.\, \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} .$$

3/ Použijte Lebesgueovu větu přímo, "hrubý" odhad částečného součtu řady $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,.\, x^{p+k} \log\frac{1}{x}$ dá majorantu $\frac{x^p}{1-x} \log\frac{1}{x}$, "jemnější" odhad dá majorantu $\frac{2x^p}{1+x} . \log\frac{1}{x}$, obojí lze užít . ‖

4,42. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1-x^3} \log\frac{1}{x}\, dx = \frac{4\pi^2}{27}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} \log\frac{1}{x}\, dx = \frac{2\pi^2}{27}$.

‖ a/ Můžeme použít rozvoje funkce $\frac{1}{1-x^3}$ pro $x \in (0,1)$ a Leviho větu, dostaneme

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1-x^3} \log\frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{3k} . \log\frac{1}{x}\, dx +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^{3k+1}\cdot\log\frac{1}{x}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+2)^2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{9}\cdot\frac{\pi^2}{6}\;.$$

b/ Můžete použít rozvoje funkce $\frac{1}{1+x^3}$, Lebesgueovu větu a výsledku bodu a/, dostanete

$$\int_0^1\frac{1-x}{1+x^3}\log\frac{1}{x}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3k+1)^2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3k+2)^2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(3k)^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{9}\cdot\frac{\pi^2}{12}\;.$$

4,43. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1\log\frac{1+x}{1-x}\,dx = 2\cdot\log 2$.

1/ Integrál spočtěte metodou integrace per partes jako Newtonův.

2/ Ze vztahů

$$\left[\log\frac{1+x}{1-x}\right]'=\frac{2}{1-x^2}\;,\qquad \log 1=0$$

odvoďte, že

$$\log\cdot\frac{1+x}{1-x}=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}\qquad\text{pro }x\in(-1,1)\;;$$

dále použijte Leviho větu, dostanete

$$\int_0^1\log\frac{1+x}{1-x}\,dx=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}=2\log 2\quad\text{(viz př. 4,29).}$$

4,44. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}\,dx=\frac{\pi^2}{4}$.

1/ Použijte rozvoj funkce $\log\frac{1+x}{1-x}$ v intervalu $(0,1)$ jako v př. 4,43 a Leviho větu, dostanete

$$\int_0^1\frac{1}{x}\cdot\log\frac{1+x}{1-x}\,dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{4}\quad\text{(viz př. 4,85)}$$

2/ Použijte vztahu

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\log(1+x)-\log(1-x)$$

a výsledků příkladů 4,33 , 4,34 .

4,45. Buď $p \in (0,+\infty)$, potom

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x^p)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6p}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^p)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p}$,

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x^p}\log.\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{6p^2}$,

d/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p^2}$

Příklady a,b/ jsou analogické k příkladům 4,24; 4,25, příklady c,d/ lehko odvodíte rozvojem funkcí $\frac{1}{1-x^p}$, $\frac{1}{1+x^p}$. Viz též př. 4,33, 4,34 /substituce $x^p = t$! / anebo př. 6,67

4,46. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^\infty \log(1-e^{-x})\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$,

b/ $\displaystyle\int_0^\infty \log(1+e^{-x})\,dx = \frac{\pi^2}{12}$,

c/ $\displaystyle\int_0^\infty \log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\frac{\pi^2}{4}$

I/ Substitucí $e^{-x} = t$ převeďte dané integrály na integrály z příkladů 4,33 a 4,34.

II/ Příklad a/ řešte pomocí rozvoje funkce $\log(1-e^{-x})$ a Leviho věty, příklad b/ pomocí rozvoje funkce $\log(1+e^{-x})$ a Lebesgueovy věty a konečně příklad c/ pomocí rozvoje funkce $\log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ (viz obdobný příklad 4,43) a Leviho věty.

III/ V příkladu c/ použijte též vztahu $\log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \log(1-e^{-x}) - \log(1+e^{-x})$.

4,47. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,.\,\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$ pro $|b| < a$.

1/ Jako cvičení ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (0,+\infty)$.

2/ Použijte rozvoje funkce sin v E_1 -

$$\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{pro každé } y \in E_1 ,$$

$$\text{tedy} \quad e^{-ax} . \sin bx = e^{-ax} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(bx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Dále použijte Lebesgueovu větu, odhadneme částečné součty, "hrubým" odhadem dostáváme

$$\left| \sum_{k=0}^{N} (-1)^k . e^{-ax} . \frac{(bx)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leqq g(x), \text{ kde}$$

$$g(x) = e^{-ax} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|b| x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{pro} \quad x \in (0,+\infty) .$$

Použijte dále vztahů

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-ax} . x^n \, dx = \frac{n}{a} I_{n-1} , \quad I_0 = \frac{1}{a} ,$$

dostáváme

$$\int_0^{\infty} g(x) \, dx = \frac{|b|}{a^2} . \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|b|}{a}\right)^{2k} \qquad \text{(ověřte!)},$$

tedy $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, právě když $|b| < a$ (proč?).
V tomto případě

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} . \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} = \frac{b}{a^2+b^2} .$$

Při tomto způsobu výpočtu integrálu bylo nepříjemné omezení $|b| < a$.

3/ Integrál též spočtěte jako Newtonův pomocí dvojnásobné integrace per partes, jediná podmínka na parametry a,b bude při tomto způsobu výpočtu podmínka $a > 0$.

*4/ Pokuste se také spočítat integrál pomocí následujícího postupu:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} . \sin bx \, dx = \mathrm{Im} \int_0^{\infty} e^{x(-a+ib)} \, dx = \mathrm{Im} \frac{1}{a-ib} = \frac{b}{a^2+b^2} .$$ ‖

4,48. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$ pro $|b| < a$!

‖ Volte stejný postup jako v minulém příkladě . ‖

4,49. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} . \frac{\sin bx}{x} \, dx = \mathrm{arctg} \frac{b}{a}$ pro $|b| < a$.

‖ Postupujte stejně jako v př. 4,47, uvědomte si, že

$$\operatorname{arctg} y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{pro} \quad y \in \langle -1, +1 \rangle .$$

Výpočet nám opět nedává nic v případě $|b| \geqq a > 0$,

viz též př. 6,22 . ‖

Obdobně jako u posloupností funkcí, nemusí být vždy pravda, že

$$\int_M \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n \ .$$

Uveďme příklad:

4,50°. Definujme funkce v_n na intervalu $(0,1)$ předpisem

$$v_n(x) = n x^{n-1} - (n+1)\, x^n \ ,$$

$$\text{buď} \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad \text{na} \quad (0,1) \ .$$

Potom

a/ $v(x) = 1$ pro $x \in (0,1)$, tedy $\int_0^1 v(x)\,dx = 1$,

b/ pro každé $n \in N$ je $\int_0^1 v_n(x)\,dx = 0$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 v_n(x)\,dx = 0 \ .$$

Jako cvičení ukažte přímo, že

1/ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ nekonverguje stejnoměrně v $(0,1)$

(uvažujte $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 1_-} v_n(x)$ a ukažte, že tato řada nekonverguje),

2/ nemůže být $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |v_n(x)|\,dx < +\infty$ - viz př. 4,31

(pro $x \in (0, \frac{n}{n+1})$ je $v_n > 0$ a

$$\int_0^1 |v_n(x)|\,dx \geqq \int_0^{\frac{n}{n+1}} v_n(x)\,dx = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \frac{1}{n+1} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+1}) \ .$$

4,51. Řešte následující příklady

a/ $$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = -4$$

‖ **1/ Integrál spočtěte jako Newtonův.**

2/ Použitím Leviho věty a rozvoje funkce log(1-x) vyjde

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = -\frac{4}{3}\left(1+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}+\dots\right),$$

srovnáním obou výsledků dostáváme vzorec

$$1+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}+\dots = 3 \quad .\|$$

b/ $$\int_0^1 \frac{1-x^{p-1}}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p}\right) \quad \text{pro } p\in(0,+\infty).$$

c/ $$\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot(1-e^{-ax})\cdot x^{-1}\,dx = \log(1+a) \quad \text{pro } a\in(-1,+1)$$

‖ 1/ Integrál konverguje pro $a\in(-1,+\infty)$.

2/ Ze vztahu

$$\frac{1-e^{-ax}}{x\,e^{x}} = e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{a^n}{n!}\,x^n$$

dostáváme použitím Lebesgueovy věty - pouze pro

$a\in(-1,+1)$! - výsledek . ‖

*d/ $$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cdot\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{b^2}{a}} \quad \text{pro } a\in(0,+\infty),$$

$b\in E_1$.

‖ 1/ Integrál konverguje pro $a\in(0,+\infty)$, $b\in E_1$.

2/ Ze vztahů

a/ $$e^{-ax^2}\cdot\cos 2bx = e^{-ax^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2bx)^{2n}}{(2n)!}$$

b/ $$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}x^{2n}\,dx = \frac{2n-1}{2a}\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cdot x^{2n-2}\,dx,$$

c/ $$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ (Laplaceův integrál, viz př. 5,84 b),

pomocí Lebesgueovy věty plyne výsledek

Viz též př. 6,49 . ‖

*e/ $$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x-1}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{a^2+k^2} \quad \text{pro každé } a\in E_1 .$$

‖ Omezme se na $a\in(0,+\infty)$; pro každé $x\in(0,+\infty)$ jest

$$\frac{\sin ax}{e^x-1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}\cdot\sin ax .$$

Použijeme Lebesgueovu větu , odhadněme částečné součty:

1/ $$\left|\sum_{k=1}^{N} e^{-kx}\cdot\sin ax\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} = \frac{1}{e^x-1},$$

ale $\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{e^x-1}\,dx = +\infty$ pro libovolné $\varepsilon > 0$,

musíme proto částečné součty odhadnout, "lépe" -

2/ $$\left|\sum_{k=1}^{N} e^{-kx} \cdot \sin ax\right| \leqq ax \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} = \frac{ax}{e^x-1} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} .$$

V tomto případě jsme užili odhadu $\sin ax \leqq ax$, který je sice "pro velká x příliš hrubý", ale nevadilo to. ||

4,52. Řešte následující příklady.

1/ Zkoumejte, zda lze integrovat řadu člen po členu (tj. zda

$$\sum_n \int_M u_n = \int_M \sum_n u_n \quad) :$$

a/ $u_n(x) = a\, e^{-nax} - b\, e^{-nbx}$, $M = (0,+\infty)$,

b/ $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^p \cdot x}$ $p > 1$, $M = (0,1)$,

c/ $u_n(x) = (-1)^n \cdot x^n$, $M = (0,1)$,

d/ $u_n(x) = x^{n-1}(1 - x^{2n})$, $M = (0,1)$,

e*/ $u_n(x) = e^{-2nx} - e^{-\pi n^2 x^2}$, $M = (0,+\infty)$

2/ Ukažte, že

a/ $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{6k \cdot 2^{6k}} ,$$

b/ $$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$$

c/ $$\int_0^1 \frac{1+x}{1-x} \log \frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{3} - 1 ,$$

d/ $$\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1 + x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$$

e/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{(1+x)^2}\,dx = \log 2$,

f/* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{dx}{\log x} = \log \frac{2}{\pi}$,

g/ $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\, e^{-x} \log \frac{1}{x}\,dx = 1 - e^{-1}$,

h/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^2 - 1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$,

i/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax} - 1} = +\infty$ pro $a > 0$,

j/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax} + 1} = \frac{\log 2}{a}$ pro $a > 0$

25535 F7