3. Zkoumání konvergence integrálů.

Jednou ze základních úloh integrálního počtu je úloha zjistit, do jakého systému funkcí zadaná funkce patří. Jedná se hlavně o určení funkcí ze systémů $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*-\mathcal{L}$, $\Lambda-\mathcal{L}^*$. S funkcemi, které by nepatřily do systému Λ /systém všech měřitelných funkcí/ se nesetkáme. Funkce ze systému $\Lambda - \mathcal{L}^*$ jsou měřitelné, ale nemají integrál; funkce ze systému $\mathcal{L}^* - \mathcal{L}$ mají Lebesgueův integrál, který má však nekonečnou hodnotu /v tomto případě říkáme, že jejich integrál diverguje/. Funkce ze systému $\mathcal{L}$ mají konečný Lebesgueův integrál /říkáme, že jejich integrál konverguje/.

Máme k disposici hlavně následující věty - věty 28, 31, 33, 35, 48, 49, 53, ještě jednou si je zopakujte.

3,1. Poznámka

Je-li I jednorozměrný interval, $I = \langle a,b\rangle$, píšeme místo $\int_I$ obyčejně $\int_a^b$. Je-li J některý z intervalů $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$, (a,b), platí $\int_a^b f = \int_J f$, jakmile má alespoň jedna strana rovnosti smysl /množina $I - J$ je totiž nulová, odůvodněte podrobně ! /.

Obdobná je situace se symboly

$$\int_a^{+\infty}, \quad \int_{-\infty}^{a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}.$$

Je-li $-\infty \leq b < a \leq +\infty$ a existuje-li $\int_b^a f$, položíme $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
Dále položíme $\int_a^a f = 0$ pro libovolnou funkci f.

3,2. Vztah Lebesgueova, Riemannova, Newtonova a zobecněného Newtonova integrálu v E_1

Riemannův integrál - je definován jako společná hodnota horního Riemannova integrálu / = infimum horních součtů/ a dolního Riemannova integrálu / = supremum dolních součtů/,
- je definován pouze pro omezené funkce a uzavřené intervaly $\langle a,b\rangle$,
- existuje například, je-li funkce f spojitá v $\langle a,b\rangle$ /viz též obecnou větu 57/,
- značíme jej symbolem $(R)\int_a^b$,

Newtonův integrál - buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b) [tj. $F' = f$ v (a,b)], nechť existují vlastní limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$, $\lim_{x\to b_-} F(x)$, pak definujeme Newtonův integrál vztahem

$$(N)\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

/je-li a nebo b nevlastní, chápeme pochopitelně $x \longrightarrow b_-$ jako $x \longrightarrow +\infty$, $x \longrightarrow a_+$ jako $x \longrightarrow -\infty$ /

- existuje například, je-li f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$,
- je-li f spojitá v otevřeném intervalu (a,b) , pak ještě N - integrál nemusí existovat,

<u>zobecněný N - integrál</u> - viz definice 63 a 65 ,

- buď F zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b) [tj. F je spojitá v (a,b) a $F' = f$ platí všude v (a,b) až snad na konečný počet bodů], nechť existují <u>vlastní</u> limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$, $\lim_{x\to b_-} F(x)$, pak definujeme

$$(ZN)\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) ,$$

<u>Lebesgueův integrál</u> - je definován pouze pro funkce ze systému $\mathcal{L}^*$,

- je-li zapotřebí jej rozlišit od ostatních integrálů, budeme jej označovat symbolem $(L)\int$, jinak používáme pouze symbolu $\int$,
- poznamenejme, že Lebesgueův integrál může nabývat i nekonečných hodnot, což se nemůže stát u R , N , ani ZN - integrálu.

Platí nyní důležité věty:

1/ existuje-li $(R)\int_a^b f \Rightarrow$ existuje $(L)\int_a^b f$ a $(R)\int_a^b f = (L)\int_a^b f$

2/ existuje-li $(N)\int_a^b f \Rightarrow$ existuje $(ZN)\int_a^b f$ a $(N)\int_a^b f = (ZN)\int_a^b f$

3/ <u>existují-li</u> kterékoliv dva z těchto integrálů, jsou si rovny.

Mohou nastat tyto případy:

a) existuje $(L)\int$ a neexistuje $(R)\int$ (viz př. 3,3)

b) existuje $(L)\int$ a neexistuje $(ZN)\int$ (viz např. 3,3)

c) existuje $(N)\int$ a neexistuje $(L)\int$ (viz např. 3,4)

d/ existuje $(N)\int$ a neexistuje $(R)\int$ (např. neomezený interval či funkce, viz též př. 8,54)

e) existuje $(R)\int$ a neexistuje $(N)\int$ (viz např. 3,5)

f) existuje $(R)\int$ a neexistuje $(ZN)\int$ (viz např. 3,5)

g) existuje $(ZN)\int$ a neexistuje $(N)\int$ (viz např. 3,6)

3,3. Buď D Dirichletova funkce (viz např. 2,31). Potom

a) existuje $(L)\int_0^1 D(x)\,dx$

[[Lze ukázat přímo jako v 2,31 anebo v 5,6 . Jiný důvod - množina racionálních čísel v 0,1 je spočetná, tedy nulová. Tudíž $D \sim 0$ v $\langle 0,1\rangle$.]]

b) neexistuje $(R)\int_0^1 D(x)\,dx$

‖ Ukažte, že libovolný horní součet je $\underline{1}$ a libovolný dolní součet je nula .‖

c) neexistuje $(N)\int_0^1 D(x)\,dx$

‖ Ukažte, že neexistuje primitivní funkce k Dirichletově funkci v $(0,1)$. Tvrzení dokažte pomocí jedné z následujících vět:

A/ Buď F funkce, mající v intervalu $\langle a,b\rangle$ vlastní derivaci F', buď $\langle\alpha,\beta\rangle \subset \langle a,b\rangle$ libovolný interval. Potom ke každému ξ ležícímu mezi hodnotami $F'(\alpha)$, $F'(\beta)$ existuje $\eta \in \langle\alpha,\beta\rangle$ tak, že $F'(\eta) = \xi$ /tzv. Darbouxova vlastnost derivace/.

B/ Buď F funkce, mající v intervalu (a,b) vlastní derivaci F'. Potom funkce F je funkce tzv. Baierovy 1.třídy /tj. jest limitou posloupnosti spojitých funkcí na (a,b)/ a množina bodů spojitosti funkce F' je hustá v intervalu (a,b) /tj. označíme-li A množinu bodů spojitosti funkce F' v intervalu (a,b), je $\bar{A} = (a,b)$, kde $\bar{A}$ znamená uzávěr množiny A v (a,b) /.

Viz též př. 3,16 .‖

d) neexistuje $(ZN)\int_0^1 D(x)\,dx$.

3,4. Uvažujte $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Ukažte, že

a/ existuje jako Newtonův

‖ Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je spojitá v $(0,+\infty)$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, tedy funkce $(N)\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ je primitivní funkcí k funkci $\frac{\sin x}{x}$ na $(0,+\infty)$; zbývá dokázat, že existuje konečná limita

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt .$$

Aby tato existovala, je nutné a stačí, aby byla splněna (B - C) podmínka, tj.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{x_0>0}\ \forall_{x'}\ \forall_{x''} \left(x'>x_0,\ x''>x_0 \Rightarrow \left|\int_0^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^{x''} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| < \varepsilon\right).$$

Odhadněte $\int_{x'}^{x''} \frac{\sin t}{t}\,dt$ pomocí integrace per partes pro Newtonovy integrály /věta 70/. Viz též větu 75 /Dirichletovo kriterium/.‖

b/ neexistuje jako Lebesgueův /viz př. 3,47/,

c/ neexistuje jako Riemannův.

3,5. Definujme funkci f takto:

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1 ,\ n = 1,2,\dots,\quad f = 0 \quad \text{jinde v } \langle 0,1\rangle .$$

Ukažte, že

a/ existuje $(R)\int_0^1 f$

⟦ Viz např. větu 57. Dokažte toto tvrzení také přímo z definice. Je ihned vidět, že libovolný dolní součet je nula a že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $\langle 0,1\rangle$, pro něž příslušný horní součet je menší než ε. ⟧,

b/ neexistuje $(N)\int_0^1 f$

⟦ Viz např. obecnou větu A v 3,3c .
Ukažte též přímo, že neexistuje primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle 0,1\rangle$. ⟧ ,

c/ neexistuje $(ZN)\int_0^1 f$

⟦ Nechť F je zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle 0,1\rangle$, potom nutně je F konstantní v intervalu $\langle 0,1\rangle$, tudíž

$$F'(\tfrac{1}{n}) \neq f(\tfrac{1}{n}) .$$

Ukažte, že neexistuje zobecněná primitivní funkce k funkci f na $\langle 0,1\rangle$ též pomocí věty A v 3,3c . ⟧

3,6. Buď $f(x) = \operatorname{sign} x$ na E_1 /tj. $f(x) = 1$ pro $x \in (0,+\infty)$, $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ pro $x \in (-\infty,0)$. Potom

a/ neexistuje $(N)\int_{-1}^{+1} f$,

b/ existuje $(ZN)\int_{-1}^{+1} f$.

3,7. <u>Poznámka</u>

Říkáme, že " $\int_M f$ konverguje " , právě když $f \in \mathcal{L}_M$.
Říkáme, že " $\int_M f$ existuje " , jestliže $f \in \mathcal{L}_M^*$; v případě, že integrál existuje, ale nekonverguje /tj. v případě, že $f \in \mathcal{L}_M^* - \mathcal{L}_M$/, budeme též někdy říkat, že " $\int_M f$ diverguje " .

3,8°. Buď f spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$, dokažte!

⟦ 1/ Existuje $(R)\int_a^b f$ a použije se věta 49 .
2/ Ukažte, že $f \in \Lambda_{(a,b)}$ /věta 48/, f je omezená na $\langle a,b\rangle$, použije se věta 31 . ⟧

3,9°. Buď $-\infty < a < b < +\infty$, buď f spojitá v (a,b) . Nechť existují vlastní limity $\lim_{x\to a_+} f(x)$, $\lim_{x\to b_-} f(x)$.
Potom $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Dokažte !
Platí tato věta i pro $a = -\infty$ či $b = +\infty$?

3,10. Buď $-\infty \leq a < b < +\infty$, nechť $f \in \mathcal{L}^*_{(a,b)}$ /tj. nechť existuje $(L)\int_a^b f$! /. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx .$$

Dokažte!

⟦ Viz větu 28 . ⟧

Předpoklad $f \in \mathcal{L}^*_{(a,b)}$ je podstatný, ukažte, že jej nelze vynechat

3,11°. Buď $-\infty \leq a < +\infty$, nechť $f \in \mathcal{L}^*_{(a,+\infty)}$.

Potom $\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int_a^n f$. Dokažte !

Opět nelze vynechat předpoklad existence integrálu vlevo, ukažte !

3,12°. Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nechť $f \in \mathcal{L}^*_{(a,b)}$. Potom

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b_-} \int_a^x f = \lim_{x \to a_+} \int_x^b f \text{ . Dokažte !}$$

‖ Použijte větu 28 a následující větu /Heine/:

"buď φ funkce v intervalu (a,b), buď $A \in E_1^*$, potom

$\lim_{x \to b_-} \varphi(x) = A \iff$ pro každou posloupnost

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n < b$, $b_n \nearrow b$ jest $\lim_{n \to \infty} \varphi(b_n) = A$ "

viz též cv. 4,14 . ‖

3,13°. Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, buď f spojitá funkce v (a,b).

Nechť F je primitivní funkce k funkci f v (a,b) /proč existuje ?/.

Jestliže $f \in \mathcal{L}^*_{(a,b)}$, pak existují limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$, $\lim_{x \to b_-} F(x)$ /ne nutně vlastní ! / a

$$(L) \int_a^b f = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x) \text{ .}$$

Dokažte!

‖ Zvolíme-li $c \in (a,b)$, je pro každé $x \in (c,b)$ $\int_c^x f(t)\,dt =$
$= F(x) - F(c)$ a aplikujeme 3,12 . Obdobně se zjistí, že
$\int_a^c f = F(c) - \lim_{x \to a_+} F(x)$, stačí nyní užít větu 26 . ‖

3,14. <u>Poznámka</u>

Připomeňme následující věty.

A/ Nechť existuje $(N)\int_a^b f$. Potom pro každé $x \in (a,b)$ existuje $(N)\int_a^x f$ a označíme-li tento integrál $\Phi(x)$, je Φ primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b).

B/ Vyslovte obdobnou větu pro ZN - integrál /věta 66/.

3,15*. a/ Nechť existují $(N)\int_a^b f$ i $(L)\int_a^b f$, nechť f je spojitá v (a,b).

Potom $(N)\int_a^b f = (L)\int_a^b f$. Dokažte !

‖ Použijte předchozí poznámku 3,14 A, větu 28 a Heineho větu v 3,12 či přímo cv. 3,12. ‖

b/ Nechť existují $(ZN)\int_a^b f$ i $(L)\int_a^b f$, nechť f je spojitá v (a,b).

Potom jsou si rovny. Dokažte !

$\boxed{3{,}16.^{*}}$ Buď F funkce, mající v intervalu (a,b) vlastní derivaci. Potom existují spojité funkce f_n v intervalu (a,b) tak, že $F' = \lim_{n\to\infty} f_n$ v (a,b). Dokažte !

‖ Zvolte $x \in (a,b)$, buď n takové přirozené číslo, že $x + \frac{1}{n} \in (a,b)$. Položte $f_n(x) = n \cdot \left[F(x + \frac{1}{n}) - F(x)\right]$ a ukažte, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F'(x)$ /z definice/.

Buď nyní $n_0 \in N$ takové, že $a < b - \frac{2}{n_0}$.

Definujme nyní pro libovolné $n \geq n_0$ funkci f_n takto

$$f_n(x) = \begin{cases} n.\left[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right] & \text{pro } x \in (a, b - \frac{2}{n}\rangle, \\ n.\left[f(b - \frac{1}{n}) - f(b - \frac{2}{n})\right] & \text{pro } x \in (b - \frac{2}{n}, b) . \end{cases}$$

Lehko ukážete, že posloupnost f_n je hledanou posloupností. ‖

Srovnáte-li tento výsledek s 3,3c, vidíte, že derivace libovolné funkce v intervalu (a,b) /pokud v tomto intervalu existuje!/ je funkce Baierovy 1. třídy. Derivace libovolné funkce v intervalu (a,b) nemusí být spojitá ve všech bodech (a,b) /uveďte příklad !/, ale z 3,3 c plyne, že bodů, ve kterých je derivace nespojitá, nemůže být "mnoho". Přesněji, množina bodů spojitosti derivace libovolné funkce v (a,b) je v tomto intervalu hustá.

$\boxed{3{,}17.^{\circ}}$ Buď F funkce, mající v intervalu (a,b) vlastní derivaci. Potom $F' \in \Lambda_{(a,b)}$. Dokažte !

‖ Použijte předchozí cvičení 3,16, větu 48 a větu 30. ‖

$\boxed{3{,}18.^{\circ}}$ Nechť existuje $(N)\int_a^b f$. Potom $f \in \Lambda_{(a,b)}$, dokažte !

‖ Použijte předchozí cvičení 3,17. ‖

$\boxed{3{,}19.^{\circ}}$ Vyslovte a dokažte obdobné věty k větám ze cvičení 3,16 - 3,18 pro zobecněnou primitivní funkci a pro ZN - integrál !

$\boxed{3{,}20.^{\circ}}$ Nechť funkce F má v intervalu (a,b) vlastní derivaci. Dokažte, že $F \in \Lambda_{(a,b)}$ /srovnejte s 3,17/ !

$\boxed{3{,}21.^{\circ}}$ Nechť $f \in \Lambda_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom $|f| \in \mathcal{L}^{*}_{(a,b)}$ a $\int_a^b |f| = +\infty$. Dokažte !

‖ Použijte větu 35 a vztahu $|f| = f^{+} + f^{-}$. ‖

$\boxed{3{,}22.^{\circ}}$ Nechť existuje $(N)\int_a^b f$ a neexistuje $(L)\int_a^b f$. Ukažte, že

a/ $f \in \Lambda_{(a,b)} - \mathcal{L}^{*}_{(a,b)}$,

b/ f mění na intervalu (a,b) své znaménko, tj. není $f \geq 0$ anebo $f \leq 0$ na (a,b), c/ (L) $\int_a^b |f| = +\infty$,

d/ (N) $\int_a^b |f|$ neexistuje .

Srovnejte též pro zajímavost s cvičením 8,50 .

3,23. Poznámka

Podle předchozích cvičení je zřejmé, že pro výpočet (L) $\int_a^b f$ nestačí nalézt primitivní funkci k funkci f na (a,b) a spočítat rozdíl příslušných limit. Vždy musíme nejdříve ověřit, že (L) $\int_a^b f$ skutečně existuje, tj. že funkce f patří do systému $\mathcal{L}^*_{(a,b)}$. Prostudujte pečlivě následující příklad.

3,24. Definujme funkci f takto:

$$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \quad \text{pro} \quad x \in \langle -1,0) \cup (0,1\rangle , \quad f(0) = 0 .$$

Lehko zjistíme, že funkce F ,

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \quad \text{pro} \quad x \in \langle -1,0) \cup (0,1\rangle ,$$

$$F(0) = 0 ,$$

je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\langle -1,+1 \rangle$

/všimněte si, že derivace funkce nemusí být spojitá funkce ! /.

Dokažte, že

a/ existuje (N) $\int_{-1}^{+1} f = 0$,

b/ neexistuje (R) $\int_{-1}^{+1} f$

[ukažte, že funkce f není v intervalu $\langle -1,+1 \rangle$ omezená, uvažujte např. posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$] ,

c/ neexistuje (L) $\int_a^b f$

[ukažte, že $2x \sin \frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}(-1, +1)$, zatímco $\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \notin$ $\notin \mathcal{L}^*(-1,+1)$, viz též obdobný př. 3,56] .

3,25° Dokažte větu 5,3 , tj. větu

a/ buď $a > 0$, potom $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$,

b/ buďte $a,b \in E_1$, $a < b$, potom $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$.

[Ukažte, že funkce $\frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}^R_{(a,+\infty)}$ podle vět 48 a 53 a poté použijte cvičení 3,11. Též pak můžete použít př. 3,13. Obdobně pro druhou část .]

3,26° Dokažte následující větu:

"Buďte f,g spojité a nezáporné funkce v intervalu $\langle a,b)$ $/ -\infty < a < b \leq +\infty /$. Nechť existuje $\lim\limits_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

25535 Z4

Potom

1/ je-li $0 < A < +\infty$, platí $\left[f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

2/ je-li $A = 0$, platí $\left[g \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

3/ je-li $A = +\infty$, platí $\left[g \in \mathcal{L}^{R}_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}^{R}_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$."

‖ Použijte definici limity a větu 31 .‖

Jak by bylo možné požadavky kladené na funkce f,g zeslabit ?

3,27°. Dokažte následující věty:

I/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a,+\infty)$, $a > 0$. Nechť existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \cdot x^{\alpha} = A$. Potom

1/ $A \in (0,+\infty) \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)} \Leftrightarrow \alpha > 1 \right]$,

2/ $A = 0 \Rightarrow \left[\alpha > 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,\infty)} \right]$,

3/ $A = +\infty \Rightarrow \left[\alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f = +\infty \right]$

‖ Použijte buďto cvičení 3,25 a 3,26 anebo přímo definici limity .‖

II/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a,b)$, $a,b \in E_1$. Nechť existuje $\lim\limits_{x\to b_-} f(x) \cdot (b-x)^{\alpha} = A$.
Potom

1/ $A \in (0,+\infty) \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Leftrightarrow \alpha < 1 \right]$,

2/ $A = 0 \Rightarrow \left[\alpha < 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

3/ $A = +\infty \Rightarrow \left[\alpha \geq 1 \Rightarrow \int_a^{b} f = +\infty \right]$.

Vyslovte obdobné věty pro nekladné funkce !

Jak je možno oslabit předpoklady o funkci f ?

3,28. Dokažte, že $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}(0,+\infty)$!

‖ 1/ Funkce $\dfrac{1}{1+x^2}$ je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $\dfrac{1}{1+x^2} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ /věta 48/. Jelikož je tato funkce kladná, je $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ /věta 33/.

2/ Protože funkce $\dfrac{1}{1+x^2}$ je spojitá v $\langle 0,1 \rangle$, existuje $(R)\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$, tedy $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ / věta 49/.
Jelikož v E_1 dále platí odhad $0 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$
a $\dfrac{1}{x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$/věta 53 či cvič. 3,25/ , je i $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$
/věta 31/. Použitím věty 26 odtud plyne, že $\dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Použijeme-li cvičení 3,27 , dostáváme ze vztahů

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 = 1 , \quad \alpha = 2 > 1$$

tvrzení, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$.

4/ Jiný způsob důkazu:

jelikož jsme zjistili, že $(L)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ existuje

/ $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$ / a jelikož

$(N)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2}$, musí mezi oběma integrály nastat rovnost /př. 3,15/ , tedy i $(L)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ je konečný, tj. $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

5/ Použijte též cvič. 3,13 . ‖

Pochopitelně, že jsme mohli postupovat i jinak, např. využít odhadu $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ pro chování integrálu v intervalu $(0,1)$; zkuste následující tvrzení dokazovat z hlediska dobrého procvičení látky - vždy všemi možnými způsoby.

3,29. Buď $\alpha \in E_1$, potom $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

‖ Použijte větu 26 a 53 . ‖

3,30. Ukažte, že $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$!

‖ 1/ Ukažte, že $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$,

2/ $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

3/ dále ukažte, že $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$,

a/ poslední tvrzení dokážeme třeba následovně:

tvrdíme, že existuje takové $x_0 > 0$, že $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ pro $x > x_0$.

Jak dokážeme tuto poslední nerovnost? Zřejmě je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \qquad \text{pro } x > x_0 .$$

Protože ale $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1$, existuje např. k číslu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ takové x_0 /podle definice limity/ , že

$x > x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \leq 1 + \frac{1}{2}$, což jsme vlastně chtěli ukázat.

Jelikož nyní $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2x}\, dx = +\infty$, je $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\, dx = +\infty$.

Jak je to s integrálem $\int_1^{x_0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, je-li $x_0 > 1$?

b/ použijete-li cvičení 3,27 /což vlastně není nic jiného, než rychle provedená část a/ /, je vzhledem k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \cdot x = 1 \ , \quad \alpha = 1$$

dokázáno, že $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$.

Celý postup si dobře rozmyslete a jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!

3,31. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$ konverguje !

Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův !

Při vyšetřování konvergence integrálů, je třeba velmi dobře znát chování jednotlivých funkcí - zvláště v okolí "nepříjemných" bodů. Zopakujte si proto, jak vypadají například následující limity:

$$\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \log^k x \ , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} \ , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log x} \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \ ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \ , \ \dots$$

3,32. Dokažte, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$!

1/ Funkce e^{-x^2} je spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$.

2/ Zřejmě $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,9)}$ /proč?/; protože $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$, je podle cvičení 3,25 i $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(9,+\infty)}$. Tudíž $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Lze také postupovat takto /což není nic jiného, než důkaz vět ze cvičení 3,25 /:

existuje takové x_0 , že $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$ pro $x > x_0$.

Proč?

Naše nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \le e^{-x^2} \cdot x^2 \le 1 \qquad \text{pro } x > x_0 \ ,$$

která vyplývá ze vztahu $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ a z definice limity.

Protože $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ je konečný pro $x_0 > 0$, je konečný i integrál $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. Lehko ukážeme, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,x_0)}$.

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x + 1$ /proč ?/,
tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .
Zřejmě $(L)\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx$ existuje /tj. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$/
a $(N)\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx = \frac{e}{2}$. Odtud již lehko učiníme závěr,
že $0 \leq \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .‖

3,33. Dokažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$!

‖ 1/ Opět ukažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}^{R}_{(1,2)}$.

2/ Protože

$$\lim_{x \to 1_+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}}\text{ , tedy } \alpha = \frac{1}{2} < 1 \text{ ,}$$

je podle 3,25 $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$.

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$, že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} \text{ .}$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy
i omezená v $\langle 1,2 \rangle$.
Ze vztahu $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .‖

3,34. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,dx = +\infty$!

‖ 1/ Opět $\frac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$.

2/ Protože $\lim_{x \to 1_-} \frac{1}{1-x^3}(1-x) = \frac{1}{3}$, $\alpha = 1$,
plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta K , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x+x^2} \text{ a funkce } \frac{1}{1+x+x^2}$$

nabývá v intervalu $\langle 0,1\rangle$ kladného minima , odtud již lehko dokážete tvrzení.

4/ Spočtěte primitivní funkci F k funkci $\frac{1}{1-x^3}$ na intervalu $(0,1)$ a použije cvič. 3,13 . ||

3,35. Dokažte, že $x^{-\frac{5}{4}} \cdot \log x \in \mathcal{L}^{K}_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

|| 1/ Ukažte, že $x^{-\frac{5}{4}} \log x \in \mathcal{L}^{K}_{(0,1)}$ a $x^{-\frac{5}{4}} \log x \in \mathcal{L}^{R}_{(1,+\infty)}$.

2/ Ukažte, že

a/ $x^{-\frac{5}{4}} \log x \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$, neboť

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{-\frac{5}{4}} \log x\right] \cdot x^{\frac{9}{8}} = 0 ,$$

b/ $x^{-\frac{5}{4}} \log x \notin \mathcal{L}_{(0,1)}$, neboť např.

$$\lim_{x\to 0_+}\left[x^{-\frac{5}{4}} \log x\right] \cdot x = -\infty .$$

3/ Ukažte, že

a/ existuje $K > 0$ tak, že $0 \leq x^{-\frac{5}{4}} \log x \leq \frac{K}{x^{\frac{9}{8}}}$, pro velká x ,

b/ existuje $C > 0$ tak, že

$$x^{-\frac{5}{4}} \log x \leq \frac{-C}{x} < 0 \quad \text{pro} \quad x \in (0,1) .$$

4/ Nalezněte primitivní funkci a použijte 3,13 . ||

3,36.

Dokažte, že

1/ $e^{-x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ /ukažte podle 3,28 všemi způsoby, výsledek si pamatujte/ ,

2/ $\log x \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

3/ $\frac{\log(1-x)}{x} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

4/ $\frac{\log(1+x)}{x} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

5/ $\frac{\log x}{1-x} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

6/ $\frac{\log x}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

7/ $\log \sin x \in \mathcal{L}_{(0,\frac{\pi}{2})}$

8/ $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

9/ $\frac{1}{\log x} \in \mathcal{L}^{K}_{(0,1)} - \mathcal{L}_{(0,1)}$

10/ $\frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

11/ $\int_0^\infty \frac{\operatorname{artg} x}{x}\,dx = +\infty$

12/ $\int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}} < +\infty$

13/ $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

14/ $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ konverguje

15/ $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}$ konverguje

16/ $\sin^2 \frac{1}{x} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$

17/ $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ konverguje

18/ $\int_0^1 e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx$ konverguje

19/ $\int_0^1 \log x \; e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx$ konverguje

20/ $\int_0^\infty \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje

21/ $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konverguje

22/ $\int_0^1 \frac{\log x}{x.\sqrt{1-x^2}} = -\infty$

23/ $\int_1^\infty \frac{\log x}{x.\sqrt{x^2-1}}$ konverguje

24/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{tgx}}$ konverguje

25/ $\int_0^\infty e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}\,dx$ konverguje

26/ $\int_0^\infty (x)^{\frac{1}{x}}\,dx = +\infty$

27/ $\int_0^2 \frac{\log x}{2-x}\,dx = +\infty$

28/ $\int_{-1}^{+1} \cos\left[\sin \frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}}\right]dx$ konverguje

29/ $\int_{-1}^{+1} (\left|\sin \frac{1}{x}\right|)^{e^{\frac{1}{x}}}$ konverguje

30/ $\int_0^\infty e^{-x} \sin x\,dx$ konverguje

31/ $\int_0^1 \log x \sin \frac{1}{x}\,dx$ konverguje

32/ $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{x}\,dx$ konverguje

33/ $\int_2^\infty \frac{\log x}{x}\,dx = +\infty$

34/ $\frac{1}{x^2(x+1)} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$

35/ $\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}\,dx = +\infty$

36/ $\int_1^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x}\,dx = +\infty$

37/ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

38/ $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ konverguje

39/ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$ konverguje

40/ $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$ diverguje

41/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje

42/ $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3-1}\,dx = +\infty$

43/ $\frac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

44/ $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$ konverguje

45/ $\frac{x}{(1+x)^3} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

46/ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}}$ konverguje

47/ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5}}$ diverguje

48/ $\int_1^2 \frac{dx}{x.\log x}$ diverguje

49/ $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ konverguje

50/ $\int_{-1}^{+1} \frac{4x^3}{x^4-1}\,dx$ diverguje

3,37°. I/ Buď f definována v intervalu $(a,+\infty)$. Nechť $f \in \Lambda_{(a,+\infty)}$, $f \geq 0$ na $(a,+\infty)$. Nechť existuje limita $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. Je-li $A > 0$, je $\int_a^{+\infty} f = +\infty$. Dokažte !

⟦ Zřejmě $f \in \mathcal{L}^{R}_{(a,+\infty)}$. Podle definice limity existuje takové $x_0 > a$, že $0 < \frac{A}{2} \leq f(x)$ kdykoliv $x \geq x_0$. Tedy nutně

$$\int_a^{\infty} f \geq \int_{x_0}^{\infty} \frac{A}{2} = +\infty \quad . \rrbracket$$

Co lze říci v případě, že $A = 0$?

II/ Buď $f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)}$, $f \geq 0$ na $(a,+\infty)$.

Potom

1/ buďto $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje, anebo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

2*/ nutně $\liminf_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Uveďte příklad funkce $f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)}$, $f \geq 0$ takové, že $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ neexistuje ! /Viz kupř. 3,52/.

Jaká je situace v případě, že není $f \geq 0$ na $(a,+\infty)$?

3,38. Poznámka

Srovnejte výsledky předchozího cvičení 3,37 s obdobnými vlastnostmi konvergentních řad

$$/ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ / .$$

3,39. Velmi často se stává, že funkce jejíž integrál zkoumáme, je funkcí ještě nějakého dalšího parametru, tj. jest funkcí dvou /eventuelně více/ proměnných. Pro nějaké hodnoty tohoto parametru může integrál konvergovat, pro jiné divergovat či vůbec neexistovat. Naším úkolem je pak zjistit, do jakého systému funkcí daná funkce patří pro různé hodnoty parametru.

Všimněte si, že obě věty ze cvičení 3,27 dávají nejsilnější tvrzení v případě, že limita A je konečná a různá od nuly. V příkladech se vždy snažíme tedy nalézt exponent α tak, aby skutečně bylo $0 < A < +\infty$. V dalších příkladech vždy x znamená proměnnou, ostatní písmena parametry. Čtenáři by neškodilo, kdyby si již nyní přečetl odstavec 4,14.

3,40. Dokažte, že $\frac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

1/ Funkce $\frac{x^{a-1}}{1+x}$ je pro každé $a \in E_1$ spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $\frac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ pro všechna $a \in E_1$.

2/ Použijeme cvičení 3,27.

Protože $\lim_{x\to 0_+} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, x^{1-a} = 1$, jest

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow 1 - a < 1 \text{, tj. } a > 0 .$$

Dále $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, x^{2-a} = 1$, tedy

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)} \Leftrightarrow 2 - a > 1 \Leftrightarrow a < 1 .$$

Celkově je $\frac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

3/ Jiné řešení:

v podstatě týmž - vám již známým - způsobem ukážete, že existují kladné konstanty K_1, K_2, C_1, C_2 a reálná čísla $x_k > 0$, $x_c > 0$ tak, že

$$x \in (0,x_k) \Rightarrow \frac{K_1}{x^{1-a}} \leq \frac{x^{a-1}}{1+x} \leq \frac{K_2}{x^{1-a}} ,$$

$$x \in (x_c,+\infty) \Rightarrow \frac{C_1}{x^{2-a}} \leq \frac{x^{a-1}}{1+x} \leq \frac{C_2}{x^{2-a}} .$$

Odtud opět vyplývá tvrzení.

4/ Ukažme na tomto příkladě, jak by si měl asi počínat zkušenější posluchač.

Předně si uvědomí, že integrál existuje pro každou hodnotu $a \in E_1$. Zjistí, že jedinými "nepříjemnými body" jsou body "0" a " $+\infty$ ", V okolí nuly se integrál bude chovat jako integrál z funkce x^{a-1} /neboť funkce $\frac{1}{1+x}$ nemá v okolí 0 na konvergenci integrálu žádný vliv/, tedy integrál $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$ bude konvergovat, právě když

$-(a-1) < 1$. V okolí nekonečna se bude integrál chovat asi jako integrál z funkce x^{a-2} /neboť v okolí nekonečna se chová funkce $\frac{1}{1+x}$ jako funkce $\frac{1}{x}$ /, tj. bude konvergovat, právě když $-(a-2) > 1$. Odtud již zjistí výsledek, a protože je zkušený posluchač, lehko svá tvrzení podrobně odůvodní . ‖

3,41. Zařaďte funkci $\dfrac{x^{a+\frac{3}{2}}}{1+x^2}$ do systémů $\mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, $\mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ v závislosti na parametru a !

‖ Proveďte diskusi jako v předchozím příkladě ; integrál konverguje, právě když $a \in (-\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2})$. ‖ .

3,42. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^k}\,dx$ konverguje, právě když $k \in (1,2)$!

‖ 1/ Ukažte, že $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^k} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ pro každé $k \in E_1$.

2/ Použijte cvičení 3,27:

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^k} \cdot x^{k-1} = 1 \text{ , tedy}$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^k} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow k-1 < 1 ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^k}\, x^k = \frac{\pi}{2} \text{ , tedy}$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^k} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)} \Leftrightarrow k > 1 .$$

3/ Odhadněte funkci $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^k}$ jako v př. 3,40 - 3 / .

4/ Zkušený posluchač:

u nuly se funkce chová jako funkce $\dfrac{1}{x^{k-1}}$ /neboť $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ je asi 1 / , u nekonečna se chová jako funkce $\dfrac{1}{x^k}$ / neboť arctg x je asi $\dfrac{\pi}{2}$ / , odtud odvodí výsledek . ‖

3,43. Ukažte, že

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx \quad \text{konverguje} \Leftrightarrow s \in (0,+\infty) .$$

1/ Integrál existuje pro každé $s \in E_1$.

2/ Použijte cvičení 3,27 .

3/ Lehko ukážete, že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{e^{-1}}{x^{1-s}} \leq x^{s-1} e^{-x} \leq \frac{1}{x^{1-s}} ,$$

$$x \in (x_0,+\infty) \Rightarrow 0 \leq x^{s-1} e^{-x} \leq \frac{1}{x^3}$$

odtud plyne tvrzení .

Viz též př. 8,63 . ||

3,44. Dokažte, že

1/ $\int_{-\infty}^{0} e^{px}\, dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $p > 0$,

2/ $x^2 \cos ax \in \mathcal{L}_{(0,2)} \Leftrightarrow a \in E_1$,

3/ $\frac{\sin x}{x^a(\pi - x)^a} \in \mathcal{L}_{(0,\pi)} \Leftrightarrow a \in (-\infty ,2)$,

4/ $a \in (0,+\infty) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} e^{-ax} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$,

5/ $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $b \in E_1$,

6/ $a \leq -1 \Rightarrow \int_{0}^{1} x^a \log x\, dx = -\infty$,

7/ $(\operatorname{tg} x)^a \in \mathcal{L}_{(0,\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow a \in (-1,+1)$,

8/ $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow n \in (-1,+\infty)$,

9/ $\int_{0}^{1} x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $p > 0$, $q > 0$,

10/ $\frac{x}{2+x^a} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow a \in (2,+\infty)$,

11/* pro která n , k konverguje $\int_{0}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^n}\, dx$? ,

12/ $\int_{0}^{\infty} x^k\, dx$ diverguje pro všechna $k \in E_1$,

13/ $\frac{1-\cos x}{x^k} \in \mathcal{L}_{(0,\pi)} \Leftrightarrow k < 3$,

14/ $\frac{1}{(\sin x)^a} \in \mathcal{L}_{(0,\pi)} \Leftrightarrow a < 1$,

15/ $\frac{x^k}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow k \in (-1,+\infty)$,

16/ $(\log x)^n \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow n > -1$, 17/ $\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^4}\,dx = +\infty$ pro každé $n \in E_1$,

18/ $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^n}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $n \in (1,2)$,

19/ $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x.\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in E_1$,

20/ $\int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in \langle -1,+1 \rangle$,

21/ $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{a^2+x^2}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in E_1$, $a \neq 0$,

22/ $\int_0^\pi \log(\sin ax)\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in (0,1\rangle$,

23/ $a \in E_1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+a^2} \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$,

24/ buď $a > b$, potom

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\,dx \text{ konverguje } \Leftrightarrow 0 < b < a < 1 ,$$

25/ $\int_0^\infty \sin(\sqrt{x^{2a}+1} - x^a)\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in (1,+\infty)$,

26/ $\int_0^1 x^s (1-x^2)^t\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $s > -1$, $t > -1$,

27/ $x^x e^{-x^k} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow k \in E_1$,

28/ $n \in E_1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1-x}\,dx = +\infty$,

29/ $\int_A^\infty \frac{x^2}{a^2+x^2}\,dx$ diverguje pro všechna $a, A \in E_1$

Dalším typem příkladů, které budeme řešit, jsou úlohy, v nichž máme ukázat, že daná funkce nemá integrál, tj. že neleží v systému $\mathcal{L}^*$. Protože v praxi se nesetkáme s neměřitelnými funkcemi, jde o to dokázat, že daná funkce leží v systému $\Lambda - \mathcal{L}^*$. K tomu budeme hlavně používat následujících vět - věty 26, 27, 35 a 44 , zopakujte si jejich znění !

3,45. Dokažte, že $\sin x \in \Lambda_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$!

/Dopouštíme se zde jedné nekonkretnosti - místo abychom správně psali "funkce sin", píšeme "funkce sin x" , čtenáři tato menší nekonkretnost snad nebude vadit./

1/ Funkce $\sin x$ je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $\sin x \in \Lambda_{(0,+\infty)}$. Odtud plyne, že $(\sin x)^+ \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$, $(\sin x)^- \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$ /věta 35/ a podle věty 27 je

$$\int_0^{\infty} (\sin x)^+ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi n}^{(2n+1)\pi} \sin x \, dx = +\infty \quad ,$$

obdobně $\int_0^{\infty} (\sin x)^- \, dx = +\infty$, tedy $\sin x \notin \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$ /věta 35/.

2/ Kdyby $\sin x \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$, musel by mít podle věty 27 smysl součet $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x \, dx$, což však není splněno.

3/ Kdyby $\sin x \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$, musela by podle cvičení 3,13 existovat limita $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, kde F je libovolná primitivní funkce k funkci $\sin x$ na $(0,+\infty)$. Ale např. $F(x) = -\cos x$ a uvedená limita zřejmě neexistuje.

4/ Definujme si funkci g na E_1 takto:

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in (0,+\infty) \ , \\ 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle \ . \end{cases}$$

Ukažte podle definice, obdobně jako v př. 2,30, že

$$\tilde{A}g = +\infty \quad , \quad \underset{\sim}{A}g = -\infty \quad ,$$

tedy i $\tilde{\int_0^{\infty}} \sin x \, dx = +\infty$, $\underset{\sim}{\int_0^{\infty}} \sin x \, dx = -\infty$ /viz definici za větou 12 /.

Odtud je vidět, že nemůže být $\sin x \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$.

3,46. Dokažte, že neexistuje $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$!

1/ Ukažte opět, že $x \in \Lambda$ a dále, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x)^+ dx = \int_0^{\infty} x \, dx = +\infty \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x)^- dx = \int_{-\infty}^{0} (-x) \, dx = +\infty \ .$$

2/ Kdyby bylo $x \in \mathcal{L}^*_{(-\infty,+\infty)}$, musel by mít smysl součet

$$\int_{-\infty}^{0} x \, dx + \int_0^{\infty} x \, dx \ .$$

3/ Použijte též cvičení 3,13 - kdyby bylo $x \in \mathcal{L}^*_{(-\infty,+\infty)}$, muselo by být $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} - \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2}$, ale rozdíl posledních limit nemá smysl.

4/ Použijte též př. 2,30.

3,47. Dokažte, že neexistuje (L) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$!

/Viz též př. 3,4/.

1/ Pomocí vztahu

$$x \in (k\pi, (k+1)\pi) \Rightarrow \frac{1}{x} \geqq \frac{1}{(k+1)\pi}$$

a věty 27 ukažte, že

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^+ dx \geqq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = +\infty \quad .$$

Obdobně $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^- dx = +\infty$.

2/ Použijte též přímo větu 27 .

3/ Lze použít cvičení 3,13 pro důkaz neexistence tohoto integrálu?

3,48. Proveďte diskusi existence a konvergence $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^a}\, dx$!

a/ $a \in \langle 2, +\infty) \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^a}\, dx = +\infty$,

$$\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^a}\right| dx < +\infty \quad .$$

b/ $a \in (1,2) \Rightarrow \frac{\sin x}{x^a} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

c/ $a \in (-\infty, 1\rangle \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^a}\, dx$ neexistuje .

Jaká bude diskuse, budeme-li chápat tento integrál jako Newtonův ?

3,49. Dokažte, že

1/ $\frac{\sin x}{(1-x^2)^a} \in \mathcal{L}_{(-1,+1)}$ pro $a \in (-\infty, 1)$,

$\frac{\sin x}{(1-x^2)^a} \in \Lambda_{(-1,+1)} - \mathcal{L}^*_{(-1,+1)}$ pro $a \in \langle 1, +\infty)$,

2/ neexistuje $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} x\, dx$,

3/ neexistuje $\int_{-\infty}^{3} \cos x\, dx$,

4/ neexistuje $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx$,

5/ neexistuje $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x\, dx$

‖ použijte vztahu

$$x \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{2}, \frac{(2k+3)\pi}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geqq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \quad , ‖$$

6/ neexistuje $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx$

‖ a/ ukažte, že

$$\int_0^\infty (\sin x^2)^+ \, dx = \sum_{K=0}^{\infty} \int_{\sqrt{2K\pi}}^{\sqrt{(2K+1)\pi}} \sin x^2 \, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{K=0}^{\infty} \left[\sqrt{(2k+\tfrac{1}{2})\pi} - \sqrt{2k} \right]$$

a poslední řada diverguje,

obdobně $\int_0^\infty (\sin x^2)^- \, dx = +\infty$,

b/ pomocí věty o substituci ukažte, že

$$\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \, dy$$

tato rovnost platí co do existence i co do hodnoty ,

podle př. 3,48 však poslední integrál neexistuje ‖,

7/ $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x} dx = +\infty$

‖ viz obdobný př. 3,47 ‖ ,

8/ neexistuje $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sqrt{x^2-x+1}} \, dx$ pro žádné $a \neq 0$

‖ buď $a > 0$, využijte odhadu

$$x \in \left(\frac{2k\pi}{a}, \frac{(2k+1)\pi}{a} \right) \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \leqq x \leqq \frac{(2k+1)\pi}{a} ‖$$

3,50. Definujme funkci f takto:

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{pro } x \in \langle n-1, n) \quad , \quad n=1,2,3,\dots .$$

Dokažte, že $f \in \Lambda_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$.

‖ 1/ Ukažte, že $f \in \Lambda_{(0,+\infty)}$

a/ použitím věty 56 anebo

b/ následovně:

definujme funkce f_n takto /n = 1,2,.../

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{pro } x \in \langle n-1, n) \quad ,$$

$f_n(x) = 0$ jinde ,

potom $f_n \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ /proč ?/ a

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,.$$

2/ $\int_0^{\infty} f^+ = \int_0^{\infty} f^- = +\infty$.

3/ Kdyby $f \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$, pak nutně $\int_0^{\infty} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,

tato řada konverguje, což je ve sporu s větou 44 , neboť

$$\int_0^{\infty} |f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \,. \|$$

Co lze říci o (N) $\int_0^{\infty} f$ či o (ZN) $\int_0^{\infty} f$?

$3{,}51.^*$ Zkoumejte $\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta}}{1 + x^{\alpha} .\ \sin^2 x}\, dx$ pro $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$.

‖ Ukažte, že

1/ $\frac{x^{\beta}}{1 + x^{\alpha} \sin^2 x} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ pro $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$,

2/ platí vztah

$$x \in (n\pi, (n+1)\pi) \Rightarrow \frac{(n\pi)^{\beta}}{1+[(n+1)\pi]^{\alpha} .\ \sin^2 x} \leq \frac{x^{\beta}}{1+x^{\alpha} \sin^2 x} \leq$$

$$\leq \frac{[(n+1)\pi]^{\beta}}{1+(n\pi)^{\alpha} .\ \sin^2 x} ,$$

3/ $A > 0 \Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + A \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + A}}$,

4/ $\alpha > 0$, $\beta \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{x^{\beta}\, dx}{1 + x^{\alpha} \sin^2 x}$ konverguje ,

5/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi (n\pi)^{\beta}}{\sqrt{1+ [(n+1)\pi]^{\alpha}}} \leq \int_{\pi}^{\infty} \frac{x^{\beta}\, dx}{1+ x^{\alpha} .\ \sin^2 x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)\pi]^{\beta}}{\sqrt{1 + (n\pi)^{\alpha}}}$,

6/ náš integrál tedy konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta - \frac{1}{2}\alpha}$,
tedy právě když $\beta - \frac{1}{2}\alpha < -1$ tj. právě když $\alpha > 2(\beta + 1)$. ‖

3,52.

Poznámka

Podle předešlého cvičení konverguje například integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1 + x^5 .\ \sin^2 x} \,.$$

Funkce $\frac{x}{1 + x^5 .\ \sin^2 x}$ je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$ a všimněte si, že přes tyto dvě podmínky není $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x^5 \sin^2 x} = 0$. Stačí třeba uvažovat posloupnost $x_n = n\pi$ a dostáváme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x_n}{1 + x_n^5 \sin^2 x_n} =$

$= +\infty$. Čemu je tedy rovna $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1 + x^5 \sin^2 x}$?

/Viz též př. 3,37/.

3,53.* Buďte $\alpha > 0$, $\beta \geqq 0$. Potom

$$\int_0^\infty \frac{x^\beta}{1 + x^\alpha \cdot |\sin x|}\,dx \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > \beta + 1 .$$

Dokažte !

3,54.* Buďte a,b,c kladná. Potom

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}}{e^{bx} \cdot \sin^2 x + e^{cx} \cdot \cos^2 x}\,dx \quad \text{konverguje} \Leftrightarrow b + c > 2a .$$

Dokažte !

|| Obdobné př. 3,51 . Je nutno spočítat

$$\int_{\frac{2n+1}{2}\pi}^{\frac{2n+3}{2}\pi} \frac{1}{A \sin^2 x + B \cos^2 x}\,dx$$

Náš integrál pak konverguje $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{an}}{\sqrt{e^{bn+cn}}}$

konverguje $\Leftrightarrow$ $b + c > 2a$. ||

3,55.* Zařaďte funkci f , $f(x) = \dfrac{1}{e^x \cdot |\sin x|^a}$ do systémů

$\mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, $\mathcal{L}^R_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ v závislosti na parametru a !

3,56. /Viz též př. 3,24/.

Definujme funkci f na intervalu (0,1) předpisem :

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}\right) .$$

Ukažte, že

a/ (N) $\int_0^1 f = 0$,

b/ (L) $\int_0^1 f$ neexistuje .

|| Zřejmě $f \in \Lambda_{(0,1)}$, $f(x) = 2x \sin\dfrac{\pi}{x^2} - \dfrac{2\pi}{x} \cos\dfrac{\pi}{x^2}$.

Funkce $2x \sin\dfrac{\pi}{x^2}$ leží v systému $\mathcal{L}_{(0,1)}$, vyšetřujme funkci g , $g(x) = -\dfrac{2\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x^2}$. Ukážeme-li, že $g \notin \mathcal{L}^*_{(0,1)}$, vyplyne odtud a z věty 41 i $f \notin \mathcal{L}^*_{(0,1)}$.

25535 25

Buď tedy $a_n = (n + \frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}$, $b_n = (n - \frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}$, $x \in \langle a_n, b_n \rangle$. Potom

$$n\pi - \frac{1}{3}\pi \leq \frac{\pi}{x^2} \leq n\pi + \frac{1}{3}\pi ,$$

tudíž $\left|\cos\frac{\pi}{x^2}\right| \geq \frac{1}{2}$ a

$$\int_0^1 |g| \geq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x} \left|\cos\frac{\pi}{x^2}\right| dx \geq \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{3n+1}{3n-1} = +\infty .$$

Podle věty 44 a př. 3,22 nemůže být $g \in \mathcal{L}^*_{(0,1)}$. ‖

3,57. Buď f funkce spojitá na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, $f(0) = 0$. Nechť existuje vlastní $f'_+(0)$. Potom $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}\, dx$ konverguje. Dokažte !

‖ Ukažte, že $\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}} \cdot \sqrt{x} = f'_+(0)$ a použijte 3,27 . ‖

3,58. Rozhodněte, zda platí následující implikace:

a/ $f \in \mathcal{L}_M \Rightarrow f^2 \in \mathcal{L}_M$,

b/ $f \in \mathcal{L}^R_M$, $f^2 \in \mathcal{L}_M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$,

c/ $f \in \Lambda_M$, $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $\mu M < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$

‖ použijte vztahu $|f| \leq \frac{1}{2}(1 + f^2)$ ‖,

d/* $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $g^2 \in \mathcal{L}_M \Rightarrow f.g \in \mathcal{L}_M$,

e/ $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $g^2 \in \mathcal{L}_M$, $f \in \Lambda_M$, $g \in \Lambda_M \Rightarrow f.g \in \mathcal{L}_M$

‖ použijte vztahu $|f.g| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ ‖ ,

f/ $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $g^2 \in \mathcal{L}_M \Rightarrow (f + g)^2 \in \mathcal{L}_M$,

g/ $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $g^2 \in \mathcal{L}_M$, $f,g \in \Lambda_M \Rightarrow (f + g)^2 \in \mathcal{L}_M$

‖ použijte vztahu $(f + g)^2 \leq 2(f^2 + g^2)$ ‖ .

3,59. Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nechť funkce f je spojitá v intervalu (a,b) a nechť $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom existuje (N) $\int_a^b f$ /a je roven (L) $\int_a^b f$ /, dokažte !

‖ Použijte cvičení 3,13 ‖.

3,60.° Dokažte následující tvrzení:

1/ f monotonní v intervalu (a,b) $\Rightarrow f \in \Lambda_{(a,b)}$

‖ použijte větu 56 ‖ ,

2/ f omezená na množině M , $f \in \Lambda_M$, $\mu M < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$.

$\boxed{3{,}61.^{*}}$ Definujme funkci q na intervalu $(0,+\infty)$ takto:

je-li $x \in (0,+\infty)$, je $q(x)$ největší celé číslo, které je menší anebo rovno $\frac{1}{x}$.

Položme dále $f(0) = 0$, $f(x) = q(x) \cdot (-1)^{q(x)}$ pro $x \in (0,1\rangle$.

Ukažte, že $f \notin \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$, $\int_0^1 |f| = +\infty$.