2. Základní vlastnosti všech systémů

2,1. Znovu si zopakujte definice základního systému funkcí Z, základního funkcionálu A na Z i definici základního prostoru (Z,A). Uvědomte si, jakým způsobem se rozšíří základní systém Z s funkcionálem A na systém $\mathcal{L}$ všech integrovatelných funkcí s konečným abstraktním Lebesgueovým integrálem A.

Zhruba řečeno - nejdříve se základní systém Z /který je příliš "úzký" /rozšíří na širší obor funkcí Z^* a pro funkce z tohoto systému se definuje "přirozeným" způsobem integrál A. Poté se pro libovolnou funkci definuje její horní a dolní integrál $\tilde{A}f$, $\underset{\sim}{A}f$ a v případě, že tyto dvě hodnoty splývají a jsou konečné, říkáme, že f leží v systému $\mathcal{L}$. Společnou hodnotu $\tilde{A}f$ a $\underset{\sim}{A}f$ pak nazveme abstraktním Lebesgueovým integrálem funkce f. Odtud již lehko utvoříme systém funkcí $\mathcal{L}^*$ a systém měřitelných funkcí Λ. Konečně můžeme definovat systém měřitelných množin $\mathfrak{M}$ a integrál přes libovolnou množinu z tohoto systému.

Schematicky by bylo možno celý postup znázornit asi následovně:

(Z,A)	základní prostor
(Z^*, A)	první rozšíření pomocí monotonních limitních přechodů
$\tilde{A}f$, $\underset{\sim}{A}f$	definice horního a dolního integrálu z libovolné funkce
$(\mathcal{L}, A)$	definice oboru funkcí s konečným abstraktním Lebesgueovým integrálem
$(\mathcal{L}^*, A)$	definice oboru funkcí s abstraktním Lebesgueovým integrálem /který může mít i nekonečnou hodnotu/
Λ	systém všech měřitelných funkcí
$\mathfrak{M}$	systém všech měřitelných množin
$A_M f$	integrál přes měřitelné množiny

Jednotlivé kroky, definice i jejich oprávnění je zapotřebí si velmi podrobně rozmyslet. Až si celou teorii projdete, pokuste si ji ilustrovat na některém z konkrétních příkladů 2,5 - 2,23.

2,2. Rozhodněte, zda následující množiny funkcí tvoří základní systém Z (P je libovolná neprázdná množina):

a/ $Z = \{ f \in S(P);\ f$ je konečná na $P \}$, tj. Z je systém všech konečných reálných funkcí na P,

b/ $Z = \{ f \in S(P);\ f = 0$ na $P \}$, tj. systém Z sestává z jediné funkce identicky rovné nule na P,

c/ $Z = \{ f \in S((0,\pi))\ ;\ f(x) = a.\sin x$, a probíhá množinu všech reálných čísel $\}$,

d/ $Z = \{ f \in S(E_1)\ ;\ f$ je spojitá v $E_1 \}$,

e/ $Z = S(P)$, tj. Z je systém všech funkcí na P,

f/ $Z = \{ f \in S(P)\ ;\ f$ je konečná a nezáporná na $P \}$,

g/ $Z = \{ f \in S(P)\ ;\ f$ je konečná a záporná na $P \}$,

h/ $Z = \{ f \in S(E_1)\ ;$ existuje vlastní derivace f' v $E_1 \}$,

i/ $Z = \{ f \in S(P)\ ;\ f$ je omezená na $P \}$.

V případech a/, b/, c/, d/, i/ tvoří ; v případě e/, g/ není splněno 1_Z, 2_Z, v případě f/, h/ není splněno 3_Z

2,3. Buď Z základní systém funkcí, zjistěte, zda funkcionál A na Z splňuje axiomy $4_A - 7_A$:

a/ je-li $a \in P$, definujeme pro $f \in Z$ funkcionál A vztahem $Af = f(a)$,

b/ $f \in Z \longrightarrow Af = 0$,

c/ $a \in P$, $f \in Z \longrightarrow Af = -f(a)$,

d/ $a \in P$, $f \in Z \longrightarrow Af = |f(a)|$,

e/ $f \in Z \longrightarrow Af = \sup\limits_{x \in P} f(x)$.

V případech a/, b/ jsou axiomy splněny, v případě c/ není splněn axiom 5_A, v případě d/ axiom 6_A, v případě e/ nemusí být splněn axiom 4_A, 6_A, 7_A.

2,4. Definujme systém Z na intervalu $(0,1)$ takto:

$f \in Z$, právě když f je spojitá na $(0,1)$ a existuje konečná

$$\lim_{x \to 0_+} f(x).$$

Pro funkce ze systému Z definujme $Af = \lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$

Ukažte, že

a/ Z tvoří základní systém funkcí,

b/ funkcionál A splňuje axiomy 4_A, 5_A, 6_A,

c/ funkcionál A nesplňuje axiom 7_A .

Jaká by byla situace, kdybychom systém Z i funkcionál A definovali stejně – ale na uzavřeném intervalu $\langle 0,1\rangle$?

2,5. Buď Z množina všech funkcí definovaných na intervalu $(0,1)$ tvaru $f(x) = ax$, tj.

$$Z = \{ f \in S((0,1)) \; ; \; f(x) = ax \text{ pro } x \in (0,1) \} .$$

Pro $f \in Z$, $f(x) = ax$ definujme $Af = a$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \{ f_{+\infty} \}$, $Z^K = Z \cup \{ f_{-\infty} \}$, kde $f_{+\infty}$, resp. $f_{-\infty}$ je funkce rovná identicky $+\infty$, resp. $-\infty$ na $(0,1)$,

3/ $Af_{+\infty} = +\infty$, $Af_{-\infty} = -\infty$,

4/ $\mathcal{L} = Z$, $\mathcal{L}^* = Z^* = \Lambda$,

5/ $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$ $\not\Rightarrow$ $f \cdot g \in \Lambda$,

6/ jediná měřitelná množina je prázdná množina,

7/ $f \sim g$ $\Longleftrightarrow$ $f = g$ na $(0,1)$,

8/ $(0,1) \notin \mathfrak{M}$, $\tilde{\mu}(0,1) = +\infty$,

9/ buď $A \subset (0,1)$, $A \neq \emptyset$, označme $x = \inf A$, potom

a/ $\tilde{\mu} A = +\infty$, je-li $x = 0$,

b/ $\tilde{\mu} A = x^{-1}$, je-li $x > 0$,

10^*/ $f \in Z$ $\not\Rightarrow$ $\min(f,1) \in Z$,

11^*/ $f \in \Lambda$ $\not\Rightarrow$ pro každé $c \in E_1$ je $\{ x \in (0,1) \; ; \; f(x) > c \} \in \mathfrak{M}$ /viz větu 56/ ,

12^*/ $f \in \mathcal{L}$, $\hat{f} = f$ v $(0, \frac{1}{2})$, $\hat{f} = 0$ v $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$ $\not\Rightarrow$ $\hat{f} \in \mathcal{L}$

/uvědomte si však, že $\langle \frac{1}{2}, 1) \notin \mathfrak{M}$, viz větu 12/ .

2,6. Nechť systém Z je stejný jako ve cvičení 2,5 , tj.

$f \in Z$ $\Leftrightarrow$ $f \in S((0,1))$ a existuje $k \in E_1$ tak, že $f(x) = kx$ pro $x \in (0,1)$.

Pro libovolnou $f \in Z$ položme $Af = 0$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \{ f_{+\infty} \}$, $Z^K \cup \{ f_{-\infty} \}$ /definice funkcí $f_{+\infty}$, $f_{-\infty}$ je v předchozím cvičení 2,5/, 3/ $Af_{+\infty} = Af_{-\infty} = 0$,

4/ $\mathcal{L} = \mathcal{L}^* = \Lambda = S((0,1))$,

5/ každá množina v $(0,1)$ je měřitelná a nulová,

6/ $f \in S((0,1)) \Rightarrow f \sim 0$ a $Af = 0$,

7/ $f,g \in S((0,1)) \Rightarrow f \sim g$,

8*/ $f \in Z \not\Leftrightarrow \min(f,1) \in Z$,

9*/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L}$.

2,7. Buď Z systém všech funkcí definovaných na intervalu $\langle 0,1)$ tvaru $f(x) = kx$, tj.

$$Z = \left\{ f \in S(\langle 0,1)) \; ; \; f(x) = kx \text{ pro } x \in \langle 0,1) \right\} .$$

Pro $f \in Z$, $f(x) = kx$ položme $Af = k$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor ,

2/ $Z^R = Z \cup \{f_1\}$, $Z^K = Z \cup \{f_2\}$, kde f_1 , resp. f_2 je funkce rovná $+\infty$, resp. $-\infty$ na $(0,1)$, $f_1(0) = f_2(0) = 0$,

3/ $f(0) > 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\tilde{A}f = +\infty$,

$f(0) < 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\underset{\sim}{A}f = -\infty$,

4/ $\mathcal{L} = Z$, $\mathcal{L}^* = Z^* = \Lambda$,

5/ $\mathfrak{M} = \{\emptyset\}$, tj. jediná měřitelná množina je prázdná množina.

2,8. Definujme základní systém funkcí Z stejně jako v předchozím příkladě 2,7. Pro libovolnou $f \in Z$ položme $Af = 0$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \{f_1\}$, $Z^K = Z \cup \{f_2\}$, kde funkce f_1 , f_2 jsou definovány stejně jako v př. 2,7 ,

3/ $f(0) > 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\tilde{A}f = +\infty$,

$f(0) < 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\underset{\sim}{A}f = -\infty$,

4/ $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow f(0) = 0$,

5/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow Af = 0$,

6/ $\mathcal{L} = \mathcal{L}^* = \Lambda \neq S(\langle 0,1))$,

7/ $A \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow A \subset (0,1)$ /tj. když $0 \notin A$ / ,

8/ $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mu A = 0$,

9/ $P = \langle 0,1) \notin \mathfrak{M}$,

10/ $0 \in A \Rightarrow \tilde{\mu} A = +\infty$,

11/ $f \sim g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$,

12*/ $f \in Z \not\Leftrightarrow \min(f,1) \in Z$,

13*/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L}$.

2,9. Buď $Z = \left\{ f \in S(E_1) \ ; \ f \text{ je konstantní na } E_1 \right\}$. Pro libovolnou $f \in Z$ definujeme $Af = f(0)$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \left\{ f_{+\infty} \right\}$, $Z^K = Z \cup \left\{ f_{-\infty} \right\}$, kde $f_{+\infty}$ /$f_{-\infty}$/ je funkce identicky rovná $+\infty$ /$-\infty$/ na E_1 ,

3/ $f \in S(E_1) \Rightarrow \tilde{A}f = \sup_{x \in E_1} f(x)$, $\underset{\sim}{A}f = \inf_{x \in E_1} f(x)$,

4/ $\mathcal{L} = Z$, $\mathcal{L}^* = Z^* = \Lambda$,

5/ $\mathcal{M} = \left\{ \emptyset, E_1 \right\}$, tj. jediné měřitelné množiny jsou prázdná množina a celý prostor E_1 , přičemž

$$\mu(\emptyset) = 0 \ , \ \mu E_1 = 1 \ ,$$

6/ $A \notin \mathcal{M} \Rightarrow \tilde{\mu}A = 1$.

2.10.* Buď $Z = \left\{ f \in S(\langle 0,1 \rangle) \ ; \ f \text{ je konečná a } f(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in \langle 0,1 \rangle \text{ s výjimkou snad konečného počtu bodů} \right\}$,

pro $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{x \in \langle 0,1 \rangle} f(x)$ /jedná se o konečný součet ! /.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f(x) > 0$ pro nespočetně mnoho $x \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow \tilde{A}f = +\infty$

[[zjistěte nejdříve charakteristiku systému Z^R a uvědomte si, že $\inf \emptyset = +\infty$]] ,

$f(x) < 0$ pro nespočetně mnoho $x \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow \underset{\sim}{A}f = -\infty$,

3/ jediná nulová množina je prázdná množina,

4/ $\mathcal{L} = \left\{ f \in S(\langle 0,1 \rangle) \ ; \ f(x) \neq 0 \text{ pouze pro spočetně mnoho } x \in \langle 0,1 \rangle \text{ a } \sum_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f(x)| < +\infty \right\}$,

5/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow Af = \sum_{x \in \langle 0,1 \rangle} f(x)$,

6/ $\Lambda = \left\{ f \in S(\langle 0,1 \rangle) \ ; \ f(x) \neq 0 \text{ pouze pro spočetně mnoho } x \in \langle 0,1 \rangle \right\}$,

7/ $\mathcal{M} = \left\{ A \subset \langle 0,1 \rangle \ ; \ A \text{ je spočetná} \right\}$,

8/ $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \mu A = +\infty$, je-li A nekonečná spočetná,

$\mu A = n$, je-li A konečná a má právě n prvků ,

9/ $A \subset \langle 0,1 \rangle$ je nespočetná $\Rightarrow \tilde{\mu}A = +\infty$.

2.11 . Buď P spočetná neprázdná množina, nechť $Z = \left\{ f \in S(P) \ ; \ f \text{ je konečná na } P \ , \ f \neq 0 \text{ pouze na konečné podmnožině } P \right\}$.

Pro $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{x \in P} f(x)$ /jedná se o konečný součet/

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor

2/ $f \geqq 0$ na $P \Rightarrow f \in Z^R$

$\|\!\ulcorner$ je-li $P = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, definujme $f_j(x_n) = 0$ pro $j < n$, $f_j(x_n) = \min(j; f(x_n))$ pro $j \geqq n$, potom $f_j \in Z$, $f_j \nearrow f \lrcorner\!\|$,

3/ $\Lambda = S(P)$

$\|\!\ulcorner f \in S(P) \Rightarrow f^+ \geqq 0 \Rightarrow f^+ \in Z^R \subset \mathcal{L}^R$ a použije se věta 32 $\lrcorner\!\|$,

4/ každá podmnožina P je měřitelná,

5/ $M \subset P \Rightarrow \mu M = +\infty$, je-li M nekonečná

$\mu M = n$, je-li M konečná a má právě n prvků.

$\boxed{2,12.}$ Buď P dvoubodová množina, $P = \{a, b\}$, nechť

$$Z = \{ f \in S(P) ;\ f \text{ je konečná na } P \}.$$

Pro $f \in Z$ definujme $Af = f(a) + 2f(b)$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f \in Z^R \Leftrightarrow f > -\infty$ na P

$f \in Z^K \Leftrightarrow f < +\infty$ na P,

3/ $\mathcal{L} = Z$, $\Lambda = S(P)$,

4/ $\Lambda - \mathcal{L}^* \neq \emptyset$,

5/ každá podmnožina P je měřitelná, při čemž

$\mu(\emptyset) = 0$, $\mu\{a\} = 1$, $\mu\{b\} = 2$, $\mu P = 3$.

$\boxed{2,13.}$ Buď opět P dvoubodová množina, $P = \{a,b\}$, nechť $Z = \{ f \in S(P) ;\ f$ je konečná na a $f(b) = 0 \}$.

Pro $f \in Z$ definujme $Af = f(a)$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \{f_1\}$, $Z^K = Z \cup \{f_2\}$, kde f_1, f_2 jsou definovány takto: $f_1(a) = +\infty$, $f_2(a) = -\infty$, $f_1(b) = f_2(b) = 0$,

3. $f(b) > 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\tilde{A}f = +\infty$

$f(b) < 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\underset{\sim}{A}f = -\infty$,

4/ $\mathcal{L} = Z$, $\mathcal{L}^* = Z^* = \Lambda$,

5/ definujeme-li funkci φ předpisem

$$\varphi(b) = 1, \quad \varphi(a) = +\infty,$$

je $\underset{\sim}{A}\varphi = \tilde{A}\varphi = +\infty$ a přesto $\varphi \notin \Lambda$,

6/ jediné měřitelné množiny jsou $\emptyset$, $\{a\}$, při čemž

$\mu(\emptyset) = 0$, $\mu\{a\} = 1$,

7/ množiny $\{b\}$, P jsou neměřitelné a

$$\tilde{\mu}\{b\} = \tilde{\mu}P = +\infty ,$$

8/ je-li funkce ψ rovna identicky $+\infty$ na P, je $\psi \notin \Lambda$.

$\boxed{2,14^*.}$ Buď $P = \langle -1,0) \cup (0,1\rangle$, definujme funkce φ_1, φ_2 takto:

$\varphi_1(x) = 0$ pro $x \in \langle -1,0)$, $\varphi_1(x) = x$ pro $x \in (0,1\rangle$,

$\varphi_2(x) = 0$ pro $x \in (0,1\rangle$, $\varphi_2(x) = x$ pro $x \in \langle -1,0)$.

Buď $Z = \{ f \in S(P)$; existují a_1, $a_2 \in E_1$ tak, že

$f = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2$ na $P \}$.

Pro $f \in Z$, $f = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ definujme $Af = a_1$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f \in Z^R \iff$ buďto $f \in Z$, nebo $f = +\infty$ na $\langle -1,0)$ a $f = k\varphi_1$ na $(0,1\rangle$, nebo $f = K.\varphi_1$ na $\langle -1,0)$ a $f = +\infty$ na $(0,1\rangle$, anebo $f = +\infty$ na P.

Charakterizujte obdobně systém funkcí Z^K !

3/ $\mathcal{L} = \{ f \in S(P);\ f = K.\varphi_1$ na $(0,1\rangle$, f libovolná na $\langle -1,0) \}$,

4/ $f \in \mathcal{L}$, $f = K.\varphi_1$ na $(0,1\rangle \Rightarrow Af = K$,

5/ $f \in \Lambda \iff f = K.\varphi_1$ na $(0,1\rangle$, kde $K \in E_1^*$, f libovolná na $\langle -1,0)$,

6/ $M \in \mathfrak{M} \iff M \cap (0,1\rangle = \emptyset \iff M \subset \langle -1,0)$,

7/ $M \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mu M = 0$,

8/ $f \sim g \iff f = g$ na $(0,1\rangle$,

9/ $P \notin \mathfrak{M}$,

10/ pro $A \subset P$, označme $x_A = \inf\{ A \cap (0,1\rangle \}$, potom

$\tilde{\mu}A = +\infty$, je-li $x_A = 0$,

$\tilde{\mu}A = x_A^{-1}$, je-li $x_A > 0$.

$\boxed{2,15^*.}$ Definujme P, φ_1 stejně jako v předchozím cvič. 2.14.

Buď $Z = \{ f \in S(P)$; existuje $k \in E_1$ tak, že $f = k.\varphi_1$ na $P \}$

Pro $f \in Z$, $f = k.\varphi_1$ definujme $Af = k$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f \in Z^R \iff$ buďto $f \in Z$ anebo $f = +\infty$ na $(0,1\rangle$, $f = 0$ na $\langle -1,0)$,

obdobně charakterisujte Z^K,

3/ $\mathcal{L} = Z$, $\mathcal{L}^* = Z^* = \Lambda$,

4/ nechť pro nějaké $x_0 \in \langle -1,0)$ je $f(x_0) > 0$, potom

$f \notin Z^*$, $\tilde{A}f = +\infty$,

je-li pro nějaké $x_0 \in \langle -1,0)$ $f(x_0) < 0$, je $f \notin Z^*$, $\underset{\sim}{A}f = -\infty$, 5/ jediná měřitelná množina je prázdná množina,

6/ pro $A \subset P$ označme $x_A = \inf A$, potom

$$\tilde{\mu} A = +\infty \;, \quad \text{je-li } x_A \leq 0 \,,$$
$$\tilde{\mu}(A) = x_A^{-1} \;, \quad \text{je-li } x_A > 0 \,.$$

7/ udejte příklad takové funkce $f \in S(P)$, aby

a/ $\underset{\sim}{A}f = -\infty$, $\tilde{A}f = +\infty$,

b/ $\underset{\sim}{A}f = -\infty$, $\tilde{A}f \in E_1$ (speciálně aby $\tilde{A}f = 0$) ,

c/ $\tilde{A}f = +\infty$, $\underset{\sim}{A}f \in E_1$ (speciálně aby $\underset{\sim}{A}f = 0$) ,

d/ $\underset{\sim}{A}f = -1$, $\tilde{A}f = 2$,

e/ $\underset{\sim}{A}f = 2$, $\tilde{A}f = -1$.

2,16.* Buď $P = E_1 \times \langle 0,1 \rangle$. Definujme základní systém funkcí Z takto:

$f \in Z \Leftrightarrow$ a/ $f \in S(P)$,

b/ $x \in E_1 \Rightarrow f^{x,*}(y)$ je konstantní na $\langle 0,1 \rangle$,

c/ $f(x,0) \in C_1$ /definici systému C_r viz za větou 46/.

Pro $f \in Z$ definujme $Af = (R) \int_{E_1} f(x,0)\, dx$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor

2/ $f \in \Lambda \Leftrightarrow$ a/ $x \in E_1 \Rightarrow f^{x,*}$ je konstantní (připouštíme i $\pm\infty$)

b/ $f(x,0)$ je lebesgueovský měřitelná v E_1 ,

3/ obdobně charakterisujte systémy Z^R, Z^K, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^*$,

4/ $\mathfrak{M} = \{ M \times \langle 0,1 \rangle ;$ kde $M \subset E_1$ je lebesgueovsky měřitelná $\}$,

5/ $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \notin \mathfrak{M}$, $\{ [x,x] \in E_2 \;;\; x \in \langle 0,1 \rangle \} \notin \mathfrak{M}$.

2,17.* Buď $M = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \}$, nechť

$Z = \{ f \in S(E_1);$ f je konečná v E_1 a $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ absolutně konverguje $\}$

Pro $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor (důkaz, že funkcionál A splňuje axiom 7_A je poněkud obtížnější!)

- co by se stalo v případě, kdybychom požadovali pouze konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$?

2/ $f \geq 0$ na množině M , $f > -\infty$ v E_1 $\Rightarrow f \in Z^R$,

3/ $\Lambda = S(E_1)$,

4/ každá podmnožina E_1 je měřitelná,

5/ $B \subset E_1 \Rightarrow \mu B = +\infty$ v případě, že množina $B \cap M$ je nekonečná,

$\mu B = n$ v případě, že množina $B \cap M$ má právě n prvků, 6/ $Z^R = \left\{ f \in S(E_1)\ ;\ f > -\infty \text{ na } E_1 \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ konverguje absolutně anebo } \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty \right\}$,

charakterizujte obdobně systém Z^K,

7/ množina N je nulová $\Leftrightarrow$ $N \cap M = \emptyset$

8/ $f \sim g$ $\Leftrightarrow$ $f = g$ na množině M.

$\boxed{2{,}18.^*}$ Buď P libovolná neprázdná množina, buď $M \subset P$ spočetná, nechť $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Buďte $\alpha_n \in E_1$, $\alpha_n \geqq 0$ a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$.

Buď $Z = \{ f \in S(P)\ ;\ f \text{ je omezená na } P \}$.

Pro $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(x_n)$

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ udejte charakteristiku systémů Z^R, Z^K,

3/ libovolná podmnožina P je měřitelná

(je-li $B \subset P$, je $C_B \in Z$!)

4/ $B \subset P \Rightarrow \mu B = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot C_B(x_n)$,

5/ $B \subset P$, $B \cap M = \emptyset$ $\Rightarrow$ B je nulová

(v jakém případě lze toto tvrzení obrátit?)

$\boxed{2{,}19.}$ Buď $Z = C_1$ (systém všech spojitých funkcí v E_1 s kompaktním nosičem). Pro $f \in Z$ definujme $Af = f(0)$.

Dokažte, že :

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ funkcionál A je navíc multiplikativní,

tj. $A(f.g) = Af \cdot Ag$ pro f, $g \in Z$,

3/ $f \in Z^* \Rightarrow Af = f(0)$,

4/ $f \in S(E_1) \Rightarrow \underset{\sim}{A}f = \widetilde{A}f = f(0)$,

5/ $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow f(0) \in E_1$,

6/ $\mathcal{L}^* = \Lambda = S(E_1)$,

7/ každá podmnožina E_1 je měřitelná, při čemž $\mu M = C_M(0)$,

8/ $f \sim g$ $\Leftrightarrow$ $f(0) = g(0)$.

$\boxed{2{,}20.}$ Buď Z množina všech funkcí na $\langle 0, \pi \rangle$ tvaru $f(x) = a.\sin x$.
Pro $f \in Z$ definujme $Af = (R)\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) je základní prostor,

2/ a podejte charakteristiku systémů Z^R, Z^K, L !

$\boxed{2,21.}$ Buď P množina všech přirozených čísel, nechť

$Z = \{ f \in S(P)$; f je konečná, $f(n) = 0$ pro všechna $n \in P$ a výjimkou snad konečného počtu $\}$.

Pro $f \in Z$ definujeme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ /jedná se o konečný součet/.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f \in Z^R \Leftrightarrow f > -\infty$ na P a existuje N tak, že $f(n) \geq 0$ kdykoliv $n \geq N$,

3/ $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < +\infty$,

4/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow Af = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$,

5/ $\Lambda = S(P)$,

6/ každá podmnožina P je měřitelná /čemu je rovno μM pro $M \subset P$?/.

Jak lze interpretovat funkce na množině P ? Charakterisujte potom systém funkcí $\mathcal{L}$!

Pomocí tohoto cvičení a věty 42 dokažte následující zajímavou větu z teorie řad /viz též V.Jarník, Diferenciální počet II, kap. III, §2, pozn.1/:

"Buď dána řada reálných čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, označme $a_n^+ = \max(a_n,0)$, $a_n^- = \max(-a_n,0)$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, právě když řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergují. V tomto případě pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$."

Jako další aplikaci viz příklad 8,21.

$\boxed{2,22.^*}$ Definujme množinu P a základní systém Z stejně jako v předchozím cvičení 2,21. Pro libovolnou $f \in Z$ položme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$. Dokažte, že (Z,A) tvoří základní prostor a podejte charakteristiku systémů Z^*, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$, Λ , $\mathcal{M}$! /Viz též př. 2,18/.

$\boxed{2,23.^*}$ Buď $\langle a,b\rangle \subset E_1$, buď Z množina všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pro libovolnou $f \in Z$ definujme $Af = (R)\int_a^b f$.

Ukažte, že (Z,A) tvoří základní prostor.

Uvažujme nyní $\langle a,b\rangle = \langle 0,1\rangle$ a funkce

f: $f(x) = 1$ pro $x \in (0,1\rangle$, $f(0) = 0$

g: $g(x) = +\infty$ pro $x \in (0,1\rangle$, $g(0) = 0$

h: $h(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, $h(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, $h(x) = \frac{1}{2}$ pro $x \in (\frac{1}{2} , 1\rangle$.

Ukažte, že všechny tyto funkce leží v systému Z^R .

Definujme dále funkci φ ,

$\varphi(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, $\varphi(\frac{1}{2}) = c$; $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ pro $x \in (\frac{1}{2}, 1\rangle$, ukažte, že $\varphi \in Z^R \Leftrightarrow c \in (-\infty, 0\rangle$.

Použijeme-li nyní teorii abstraktního rozšíření, obdržíme systémy Z^*, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$, Λ, $\mathcal{M}$. Jaký bude vztah těchto systémů k systémům $\mathcal{L}(a,b)$, $\mathcal{L}^*(a,b)$, $\Lambda(a,b)$, $\mathcal{M}_1$, - k systémům vzniklým rozšířením $Z = C_1$ a $Af = (R)\int_{E_1} f$ (toto je těžší otázka).

2,24. Ukažte, že některé z axiomů $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ by mohly být nahrazeny jinými, s nimi ekvivalentními:

a/ $(3_Z) \Leftrightarrow (f \in Z \Rightarrow \min(f,0) \in Z)$,

b/ $(3_Z) \Leftrightarrow (f,g \in Z \Rightarrow \max(f,g) \in Z,\ \min(f,g) \in Z)$,

c/ $(5_A) \Leftrightarrow (f \in Z \Rightarrow A|f| \geqq 0)$.

2,25. Dokažte, že platí:

a/ $f \in Z^K \Rightarrow Af = \inf Ag, \quad g \in Z, \quad g \geqq f$,

$f \in Z^R \Rightarrow Af = \sup Ah, \quad h \in Z, \quad h \leqq f$,

b/ $f \in S(P) \Rightarrow$

$\tilde{A}f = \inf Ag, \quad g \geqq f, \quad g \in Z^*$,

$\underset{\sim}{A}f = \sup Ah, \quad h \leqq f, \quad h \in Z^*$

‖ ukažte, že platí: $h \in Z^K$, $h \geqq f \Rightarrow Ah \geqq \tilde{A}f$ ‖.

2,26. Dokažte, že platí:

a/ $f_n \in Z, \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \Rightarrow g \in Z^R$,

b/ $f_n \in Z^R, \quad f_n \geqq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in Z^R$,

c/ $f, g \in \mathcal{L} \Rightarrow A(\max(f,g)) + A(\min(f,g)) = Af + Ag$,

d/ $f, g \in \mathcal{L}^* \Rightarrow \min(Af, Ag) \geqq A(\min(f,g))$.

2,27. Nechť Z_1, Z_2 jsou dva základní systémy funkcí nad množinou P, Nechť $Z_1 \subset Z_2^R$, $Z_2 \subset Z_1^R$. Potom $Z_1^R = Z_2^R$. Dokažte a vyslovte obdobnou větu pro systémy Z_1^K, Z_2^K !

> Ve všech dalších příkladech - až do kapitoly 7 - předpokládáme, že $Z = C_r$, $Af = (R)\int_{E_r} f$!!

2,28. Dokazujte následující tvrzení:

a/ $f(x) = 1$ pro $x \in \langle 0,1 \rangle$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \Rightarrow f \notin Z$, $f \in Z^K$,

$f \notin Z^R$, $f \in \mathcal{L}$, $Af = 1$

‖ tvrzení dokazujte přímo z definic i pomocí charakteristik jednotlivých systémů - viz např. věta 47 ‖, b/ $f(x) = 1$ pro $x \in (a,b)$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \Rightarrow f \notin Z$, $f \in Z^R$, $f \notin Z^K$, $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$ interval (a,b) je omezený, $Af = b - a$,

c/ $f(x) = 1$ pro $x \in (0,1\rangle$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \Rightarrow f \notin Z^*$, $f \in \mathcal{L}$, $Af = 1$,

d/ $f(x) = 1$ pro $x \in E_1 \Rightarrow f \in Z^R - Z^K$, $Af = +\infty$,

e/ $f(0) = +\infty$, $f(x) = 0$ pro $x \neq 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $f \in \mathcal{L}$, $Af = 0$

‖ a/ protože platí implikace $f \in Z^K \Rightarrow f < +\infty$ všude, nemůže být $f \in Z^K$,

b/ nechť existují $f_n \in Z$, $f_n \nearrow f$, potom existuje n_0 a $\delta > 0$ tak, že $n \geqq n_0$, $x \in (-\delta + \delta) \Rightarrow f_n(x) > 3$ (odůvodněte!), tedy též nemůže být $f \in Z^R$,

c/ zřejmě $\underset{\sim}{A}f \geqq 0$

d/ ukážeme, že $\tilde{A}f = 0$; buď tedy $\varepsilon > 0$, definujme funkci g takto:

$$g(0) = +\infty, \; g(x) = \frac{3\varepsilon}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ pro } x \in \left\langle \frac{1}{3^{n+1}} ; \frac{1}{3^n} \right) \quad n = 0,1,2 \ldots\ldots,$$

$g(x) = 0$ pro $x \in \langle 1, +\infty)$, g sudá funkce v E_1,

potom 1/ $g \in Z^R$,

2/ $Ag = \varepsilon$,

3/ $g \geqq f$.

e/ podle věty 52 též lehko ukážete, že $f \sim 0$. ‖

f/ $f(0) = 1, f(x) = 0$ pro $x \neq 0 \Rightarrow f \notin Z$, $f \in Z^K$, $f \notin Z^R$, $f \in \mathcal{L}$, $Af = 0$,

g/ $f(x) = +\infty$ pro $x \in (0,1)$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \Rightarrow f \notin Z$, $f \in Z^R$, $f \notin Z^K$, $Af = +\infty$,

h/ $f(x) = -\infty$ pro $x \in E_1 \Rightarrow f \in Z^K - Z^R$, tedy $Af = -\infty$.

2,29. Dokažte, že:

a/ $\frac{\cos x}{1+x^2} \notin Z^*$,

b/ $\sin x \notin Z^*$,

c/ $x \notin Z^*$,

d/ $\frac{1}{1+x^2} \in Z^R$,

e/ $e^{-x^2} \in Z^R$

‖ tvrzení dokažte přímo z definic i použitím věty 47. ‖

2,30. Dokažte, že:

a/ $\underset{\sim}{A} \sin x = -\infty$, $\tilde{A} \sin x = +\infty$,

b/ $\underset{\sim}{A} x = -\infty$, $\tilde{A} x = +\infty$

‖ ukažte, že platí: $g \in Z^R$, $g \geqq \sin x \Rightarrow Ag = +\infty$ ‖.

2,31. Buď D Dirichletova funkce v E_1 (tj. $D(x) = 1$ pro x racionální, $D(x) = 0$ pro x iracionální).

Dokažte, že:

a/ $D \notin Z^*$,

b/ $\underset{\sim}{A}D \geqq 0$,

c/ $\tilde{A}D = 0$.

‖ K důkazu posledního tvrzení musíte dokázat podle vlastnosti infima toto:

1) $g \in Z^R$, $g \geqq D \Rightarrow Ag \geqq 0$

2) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje taková funkce $g \in Z^R$, že $g \geqq D$ a $Ag < \varepsilon$, toto ukažte následovně - buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo; protože množina racionálních čísel je v E_1 spočetná, lze ji srovnat do posloupnosti $\{ x_1, x_2, x_3, \dots \}$. Okolo každého x_n opište interval $J_n = (x_n - \frac{\varepsilon}{2^n} , x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})$ a definujte funkce f_n takto:

$$f_n(x) = 1 \text{ pro } x \in J_n, \quad f_n = 0 \text{ jinde v } E_1 .$$

Potom - např. podle 2,28 b - je $f_n \in Z^R$ a $Af = \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$.

Položíme-li $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, dostáváme

α) $g \in Z^R$ (viz 2,26. b) ,

β) $g \geqq D$,

γ) $Ag = 2\varepsilon$. ‖

d/ $D \sim 0$, tedy $D \in \mathcal{L}$ a $AD = 0$.

‖ Viz předchozí nebo větu 52 , též 5,6 . ‖

2,32. Buď $x \in (0,1\rangle$, $x = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá nesoudělná čísla , $q > 0$. Položme $f(x) = \frac{1}{q}$; pro ostatní $x \in E_1$ buď $f(x) = 0$.
(f je tzv. Riemannova funkce).

Dokažte, že:

1/ f je spojitá v každém iracionálním bodě,

2/ v každém racionálním bodě intervalu $(0,1\rangle$ má ostré lokální maximum,

3/ $f \in Z^K$ (ukažte přímo z definice i charakteristiky Z^K),

4/ $Af = 0$,

5/ existuje $(R)\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

‖ ukažte přímo či pomocí věty 57 . ‖

6/ Existuje $(N)\int_0^1 f$ či $(ZN)\int_0^1 f$?

$\boxed{2{,}33.^*}$ Buď $G \subset E_1$ otevřená množina. Potom $c_G \in Z^R$, dokažte !

‖ Libovolnou otevřenou množinu v E_1 lze vyjádřit jako sjednocení spočetného systému otevřených disjunktních intervalů, použijte 2,28b a 2,26b ‖

$\boxed{2{,}34.^\circ}$ Je-li $f \in \mathcal{L}^*$, je $\underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f$ /věta 10/. Obrátit toto tvrzení nelze, tj. je-li pro nějakou funkci f $\underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f$, pak nemusí ještě být $f \in \mathcal{L}^*$ /vzhledem k větě 36 je pak pochopitelně $f \notin \Lambda$ /. Uveďme následující příklad.

Buď $N \subset E_1$ lebesgueovsky neměřitelná množina, nechť funkce f je identicky rovna 5 na E_1, potom

1/ $\underset{\sim}{A}(c_N + f) = \tilde{A}(c_N + f) = +\infty$,

2/ $c_N + f \notin \Lambda$.

Dokažte ! Všimněte si též př. 2,13 .

$\boxed{2{,}35.}$ Rozhodněte, zda platí následující implikace:

a/ $f \in Z^K$, $f \geq 0 \Rightarrow f \in Z^R$,

b/ $f \in Z^K$, $f \geq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^R$,

c/ $f_n \in Z^R$, $f_n \searrow f \Rightarrow f \in Z^R$ ($f \in Z^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ),

d/ $f_n \in Z^K$, $f_n \searrow f \Rightarrow f \in Z^K$,

e/ $f \in \Lambda_M$, $|g| \leq f$ na $M \Rightarrow g \in \Lambda_M$,

f/ $f \in \Lambda_M$, $g \in \mathcal{L}^*_M$, $|f| \leq g$ na $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}^*_M$,