1. Zavedení abstraktního Lebesgueova integrálu

Ze začátku se pokusíme stručně vyložit, proč se zavádí Lebesgueův integrál, proč nevystačíme ani s Riemannovým ani s Newtonovým integrálem a - co to vůbec integrál je.

Začněme se zodpověděním poslední otázky, co je to vlastně integrál (máme přitom pochopitelně na mysli určitý integrál). Zopakujte si proto, jak se zaváděl Riemannův integrál. Mějme tedy dán libovolný uzavřený interval $\langle a, b\rangle \subset E_1$ a libovolnou reálnou omezenou funkci definovanou na $\langle a, b\rangle$. Každému dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ můžeme přiřadit dvě reálná čísla - tzv. horní a dolní součet funkce f - vezměme nyní všechna možná dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a všechny možné příslušné horní a dolní součty. V případě, že se infimum množiny všech horních součtů rovná supremu množiny všech dolních součtů, nazveme tuto společnou hodnotu Riemannovým integrálem funkce f přes interval $\langle a,b\rangle$. Víme dobře, že ne pro každou omezenou funkci na intervalu $\langle a,b\rangle$ existuje Riemannův integrál, označme proto symbolem $R(a,b)$ množinu těch omezených reálných funkcí na $\langle a,b\rangle$, pro které existuje Riemannův integrál od a do b. (Zajisté je vám známo, že například každá spojitá funkce v $\langle a,b\rangle$ patří do systému $R(a,b)$). Každé funkci ze systému $R(a,b)$ jsme přiřadili právě jedním způsobem jisté reálné číslo, totiž Riemannův integrál. S takto zavedeným novým pojmem - Riemannovým integrálem - jsme pak dále pracovali a odvodili si řadu jeho vlastností.

Pokusme se nyní podat náznak obecné definice integrálu. Mějme proto dán opět libovolný interval $(a,b) \subset E_1$, tentokrát ne již nutně omezený či uzavřený a na tomto intervalu buď dán nějaký systém reálných funkcí, který si označíme $\Theta(a,b)$. Definovat integrál pro funkce ze systému $\Theta(a,b)$ znamená vlastně udat předpis, podle kterého bychom uměli přiřadit každé funkci z $\Theta(a,b)$ jisté reálné číslo. Toto přiřazení nemůže však být zcela libovolné (nemá například smysl každé funkci přiřadit číslo 11), musí mít jisté "rozumné" vlastnosti. Máme-li třeba dvě funkce f,g ze systému $\Theta(a,b)$, které mají integrál, chceme, aby i součet $f + g$ byla funkce ze systému $\Theta(a,b)$ a aby integrál z této funkce byl roven součtu integrálů z funkcí f,g. Jinou takovou vlastností integrálu by mohla být vlastnost, že integrál z nezáporné funkce v intervalu (a,b) je nezáporné číslo anebo například tato vlastnost - má-li funkce f integrál přes interval (a,b) a interval (c,d) je částí intervalu (a,b), má funkce f i integrál přes interval (c,d).

Můžeme tedy říci - zhruba - že zadat integrál na nějakém systému funkcí $\Theta(a,b)$ definovaných na intervalu (a,b), znamená udat zobrazení, které každé funkci f ze systému $\Theta(a,b)$ přiřazuje jisté reálné číslo, a přitom takovým způsobem, že toto zobrazení splňuje určité axiomy. Tedy - každé funkci $f \in \Theta(a,b)$ se přiřadí jisté reálné číslo, můžeme proto říci, že integrál je reálná funkce, definovaná na systému funkcí $\Theta(a,b)$ (pod pojmem reálné funkce na libovolné množině M rozumíme zobrazení, které každému prvku množiny M přiřazuje reálné číslo); reálné funkci, definované na systému funkcí, budeme říkat funkcionál.

Kdybychom nyní chtěli podat trochu přesnější definici integrálu, mohla by vypadat následovně.

"Mějme dán nějaký systém funkcí $\Theta(a,b)$ definovaných na intervalu (a,b). Integrálem na systému $\Theta(a,b)$ budeme nazývat libovolný funkcionál I definovaný na $\Theta(a,b)$ (tj. zobrazení I ze systému $\Theta(a,b)$ do E_1), který spolu se systémem $\Theta(a,b)$ splňuje jisté axiomy (uvedeme alespoň nejdůležitější):

1) $f, g \in \Theta(a,b) \Longrightarrow f+g \in \Theta(a,b)$ a $I(f+g) = I(f) + I(g)$,

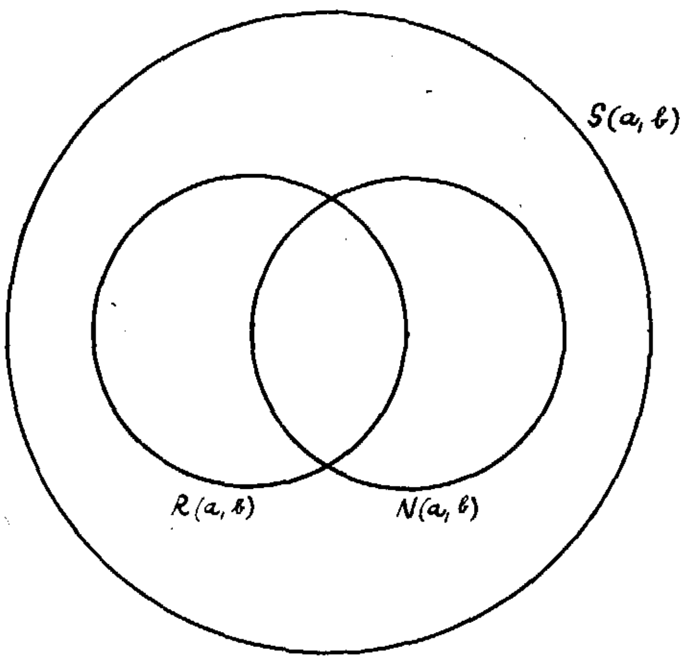
2) $f \in \Theta(a,b)$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in \Theta(a,b)$ a $I(cf) = c\, I(f)$,

3) $f \in \Theta(a,b)$, $f \geqq 0$ na $(a,b) \Longrightarrow I(f) \geqq 0$

Vrátíme-li se nazpět k Riemannově integrálu, vidíme, že tento integrál je vlastně funkcionál na systému $R(a,b)$, který všechny naše axiomy splňuje. Pro libovolnou funkci $f \in R(a,b)$ označme tedy $Rf = (R)\int_a^b f(x)\,dx$.

Je-li $(a,b) \subset E_1$ libovolný interval, můžeme pro jistou třídu funkcí definovaných na (a,b) definovat také Newtonův integrál (viz 3,2). Systém všech funkcí na (a,b) pro něž existuje Newtonův integrál značme symbolem $N(a,b)$ a pro libovolnou funkci $f \in N(a,b)$ buď $Nf = (N)\int_a^b f(x)\,dx$. Opět vidíme (věty 68, 69), že funkcionál N splňuje na systému $N(a,b)$ naše axiomy.

Jaký je vztah Newtonova a Riemannova integrálu? Z obecných vět víme, že každá funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ má jak Riemannův, tak Newtonův integrál a oba tyto integrály jsou si rovny. Tedy libovolná spojitá funkce v $\langle a,b \rangle$ leží jak v systému $R(a,b)$, tak v systému $N(a,b)$ a platí pro ni $Rf = Nf$. Je také známo, že existují funkce, které mají Newtonův integrál $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ a nemají Riemannův integrál $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ (viz př. 3,4) a také naopak (viz 3,5). Systémy $R(a,b)$ a $N(a,b)$ nejsou tedy zcela totožné, ani jeden není podsystémem druhého. Kdybychom si symbolem $S(a,b)$ označili systém všech reálných funkcí na intervalu (a,b), mohli bychom si graficky znázornit situaci asi takto:



Obrázek č.1

Víme také, že dokonce existují funkce (a je jich hodně!) které nemají ani Riemannův ani Newtonův integrál (viz př. 3,3). Platí však velmi důležitá věta

$$f \in R(a,b) \cap N(a,b) \Longrightarrow Rf = Nf$$

tj. pro funkce (ne nutně spojité v $\langle a,b \rangle$!), které mají jak Riemannův tak Newtonův integrál - oba integrály jsou stejné.

Jak jsme již podotkli, existuje mnoho funkcí, které nemají ani Riemannův ani Newtonův integrál a naší snahou nyní je definovat "nový" integrál (a "nový" systém funkcí na intervalu (a,b)), který by byl zobecněním jak Newtonova tak Riemannova integrálu a který by zahrnoval pokud možno co nejširší okruh funkcí. Ideální by bylo, kdyby se nám podařilo definovat integrál na systému <u>všech</u> funkcí $S(a,b)$, ale toto bohužel netriviálně nelze.

Tedy ještě jednou - naším cílem je definovat systém funkcí $L(a,b)$ a integrál L na $L(a,b)$ (tj. funkcionál L , splňující jisté naše axiomy), tak, aby pokud možno $L(a,b)$ byl co nejširším okruhem funkcí a aby pro funkce, které již mají Riemannův či Newtonův integrál, se nový integrál rovnal Riemannovu či Newtonovu integrálu. Přesněji, hledáme systém funkcí $L(a,b)$ a integrál L na $L(a,b)$ tak , aby platilo

1) $R(a,b) \subset L(a,b)$
2) $f \in R(a,b) \Rightarrow Rf = Lf$,
3) $f \in N(a,b) \cap L(a,b) \Rightarrow Nf = Lf$

Podmínku, aby nový integrál byl i rozšířením Newtonova integrálu (tj. aby platilo $N(a,b) \subset L(a,b)$ si klást nebudeme (viz př. 3,4).

Je nyní mnoho způsobů, jak tento nový integrál zavést. Podle toho dostáváme různé třídy integrovaných funkcí a různé druhy integrálů (například zobecněný Riemannův, Lebesgueův, Perronův, zobecněný Lebesgueův a jiné). My se podržíme metody, kterou vypracoval matematik P.J.Daniell (1889-1946), a protože v podstatě tato metoda vede ke stejnému výsledku, jaký dává metoda matematika Henri Lebesguea (1875-1943), budeme novému integrálu říkat Lebesgueův integrál.

Naznačíme ještě stručně, byť ne zcela přesně, myšlenku celého postupu. Mějme tedy opět dánu - například na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ - <u>libovolnou</u> reálnou funkci f . Vezměme všechny možné spojité funkce g na $\langle a,b \rangle$, které jsou na intervalu $\langle a,b \rangle$ větší anebo rovny naší funkci f , označme symbolem

$$H_f(a,b) = \left\{ g \ ; \quad g \geqq f \quad \text{na} \quad \langle a,b \rangle, \quad g \ \text{spojitá} \right\} ;$$

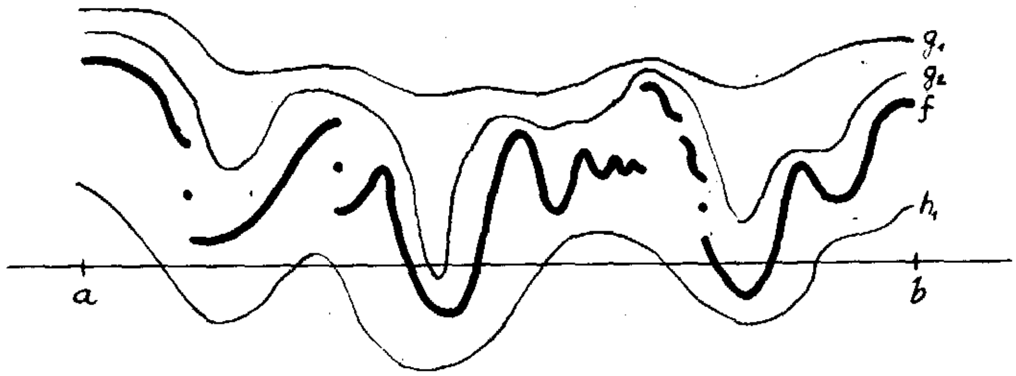
pro funkce ze systému $H_f(a,b)$ existuje Riemannův integrál a můžeme položit

$$\tilde{L} f = \inf (R) \int_a^b g(x)\, dx \ ,$$

kde infimum se bere přes všechny funkce $g \in H_f(a,b)$.
Obdobně můžeme definovat

$$\underset{\sim}{L} f = \sup (R) \int_a^b h(x)\, dx \ ,$$

kde supremum se bere přes množinu všech funkcí h, které jsou spojité v $\langle a,b\rangle$ a na tomto intervalu menší anebo rovny naší funkci f. Nakreslete si obrázek!



Obrázek č.2

V případě, že nastane rovnost $\underset{\sim}{L}f = \tilde{L}f$, mohli bychom tuto společnou hodnotu nazvat Lebesgueovým integrálem funkce f přes interval $\langle a,b\rangle$. Ukazuje se, že tato myšlenka je vhodná, ovšem majorisovat naši funkci f pouze <u>spojitými</u> funkcemi není ještě nejlepší (zkuste spočítat podle této definice $\underset{\sim}{L}f$ a $\tilde{L}f$ přes interval $\langle 0,1\rangle$ pro Dirichletovu funkci! Viz př. 3,3 ; 2,31); pro tuto myšlenku vybudování integrálu je třeba vzít o něco širší třídu funkcí než jsou funkce spojité. Přesně je celý tento postup vyložen ve skriptech I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I.

Shrneme-li, lze říci, že zavedení Lebesgueova integrálu je vhodné zejména z těchto dvou důvodů:

1) systémy funkcí, které mají Riemannův či Newtonův integrál jsou příliš úzké, je zapotřebí nalézt nějakou širší třídu funkcí, která má integrál,
2) věty odvozené v teorii Lebesgueova integrálu jsou velmi silné za hodně obecných předpokladů (viz například Fubiniova věta), teorie se proto dá velmi dobře aplikovat na konkrétní příklady.

V tomto krátkém úvodu jsem se pokusil - často ne zcela přesně a korektně - nastínit problematiku zavedení Lebesgueova integrálu.

V další části této kapitoly podáme základy teorie Lebesgueova integrálu a přidáme soupis jednotlivých vět.

Mějme dánu neprázdnou množinu P, symbolem $S(P)$ značme množinu všech funkcí na množině P (pozor! - pod pojmem funkce na množině M budeme vždy v dalším rozumět zobrazení množiny M do E_1^*; připouštíme tedy, že funkce mohou nabývat i nekonečných hodnot).

Buď $Z \subset S(P)$ množina takových funkcí, že jsou splněny následující axiomy:

axiom (1_Z)	:	$f \in Z \Rightarrow f$ je konečná na P (tj. $f(P) \subset E_1$) ,
axiom (2_Z)	:	$f_1 , f_2 \in Z , \quad \alpha_1 , \alpha_2 \in E_1 \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in Z$,
axiom (3_Z)	:	$f \in Z \Rightarrow \lvert f\rvert \in Z$.

To znamená, že mezi všemi funkcemi $S(P)$ vydělíme jistou třídu funkcí Z a to tak, aby byly splněny naše axiomy.

Na množině Z buď dán funkcionál A (tj. každé funkci $f \in Z$ je přiřazeno jisté reálné číslo Af) tak, že jsou splněny následující axiomy:

axiom (4_A)	: $f \in Z \Rightarrow Af \in E_1$,
axiom (5_A)	: $f \in Z$, $f \geq 0$ na $P \Rightarrow Af \geq 0$,
axiom (6_A)	: $f_1 , f_2 \in Z$, $\alpha_1 , \alpha_2 \in E_1 \Rightarrow A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 Af_1 + \alpha_2 Af_2$,
axiom (7_A)	: $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$ na $P \Rightarrow Af_n \to 0$.

Systému Z budeme říkat <u>základní systém funkcí</u>, funkcionálu A na Z pak <u>základní funkcionál na Z</u> , dvojici (Z,A) budeme nazývat <u>základní prostor</u>.

Základní systém funkcí Z dále rozšíříme. Definujeme systémy Z^R , Z^K , Z^* takto:

$$Z^R = \{ f \in S(P) \ ; \text{ existují } f_n \in Z , \ f_n \nearrow f \},$$
$$Z^K = \{ f \in S(P) \ ; \text{ existují } f_n \in Z , \ f_n \searrow f \},$$
$$Z^* = Z^R \cup Z^K .$$

Rovněž tak funkcionál A - který je prozatím definován na systému Z - rozšíříme na systém Z^*. Pro libovolnou funkci $f \in Z^*$ definujeme Af takto:

je-li $f_n \in Z$ monotonní posloupnost funkcí , $f_n \to f$ na P , definujeme $Af = \lim_{n\to\infty} Af_n$.

Je nutno si uvědomit, že

a) $\lim_{n\to\infty} Af_n$ vždy existuje (objasněte proč!),

b) číslo Af (které pro funkce ze systému Z^* může již být rovno $\pm\infty$) nezávisí na výběru posloupnosti $f_n \in Z$ (nemůže se tedy stát, že by existovaly dvě posloupnosti funkcí $f_n \in Z$, $g_n \in Z$, které by obě monotonně konvergovaly k funkci f a pro něž by bylo $\lim_{n\to\infty} Af_n \neq \lim_{n\to\infty} Ag_n$),

c) pro funkce $f \in Z$ splývá nová definice Af se "starým" Af (na systému Z byl totiž již funkcionál A definován a $Z \subset Z^*$!).

Máme tedy prozatím definován funkcionál A na systému Z^*. Pro <u>libovolnou</u> funkci $f \in S(P)$ definujeme nyní její <u>horní</u> a <u>dolní</u> abstraktní integrál (značme $\tilde{A}f$ a $\underset{\sim}{A}f$).

$$\tilde{A}f = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \in Z^R}} Ag \ , \qquad \underset{\sim}{A}f = \sup_{\substack{h \leq f \\ h \in Z^K}} Ah \ .$$

Poznamenejme při této příležitosti, že $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$ (v některých případech by se totiž mohlo stát - viz např. 2,7 či 2,10 - že k dané funkci $f \in S(P)$ neexistuje žádná funkce $g \in Z^R$, resp. $h \in Z^K$ taková, že $g \geq f$, resp. $h \leq f$).

Platí nyní:

$\boxed{\text{věta } 8}$: $f \in S(P) \Rightarrow \underset{\sim}{A}f \leq \tilde{A}f$,

$\boxed{\text{věta } 9}$: $f \in Z^* \Rightarrow \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f = Af$.

Definujme nyní další systém funkcí, a to $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f \in E_1 \right\}.$$

Pro funkce $f \in \mathscr{L}$ značme společnou hodnotu $\underset{\sim}{A}f$ a $\tilde{A}f$ (což je konečné číslo) opět symbolem Af (věta 9 nám k tomu dává oprávnění).

Obor funkcí $\mathscr{L}$ ještě dále rozšiřme, buď

$$\mathscr{L}^{R} = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \text{existují } f_n \in \mathscr{L}, \; f_n \nearrow f \right\},$$
$$\mathscr{L}^{K} = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \text{existují } f_n \in \mathscr{L}, \; f_n \searrow f \right\},$$
$$\Lambda = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \text{existují } f_n \in \mathscr{L}, \; f_n \to f \right\},$$
$$\mathscr{L}^* = \mathscr{L}^{R} \cup \mathscr{L}^{K} .$$

Platí tato důležitá věta:

$\boxed{\text{věta } 10}$: $f \in \mathscr{L}^* \Rightarrow \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f$.

Pro funkce $f \in \mathscr{L}^*$ značme tuto společnou hodnotu (která již nemusí být konečná!) opět symbolem Af . Funkcionál A na systému funkcí $\mathscr{L}^*$ nazýváme <u>abstraktním Lebesgueovým integrálem</u> a systém $\mathscr{L}^*$ je nejširším systémem funkcí, pro které je tento integrál definován. Funkce ze systému Λ nazýváme <u>měřitelné</u>.
Ověřte, že platí následující vztahy:

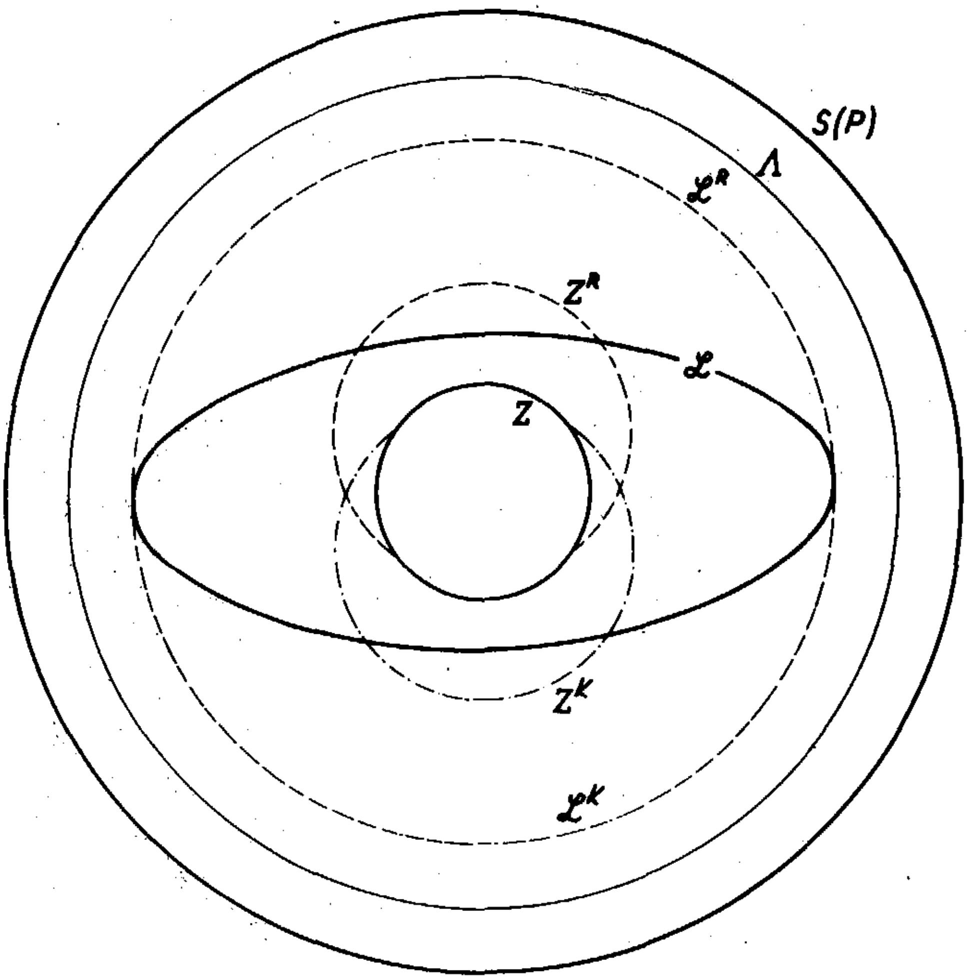
$$Z \subset Z^R \cap Z^K , \; Z \subset \mathscr{L} , \; \mathscr{L} = \mathscr{L}^{R} \cap \mathscr{L}^{K} , \; Z^R \subset \mathscr{L}^{R}$$
$$Z^K \subset \mathscr{L}^{K}, \; Z^* \subset \mathscr{L}^*, \; \mathscr{L}^* \subset \Lambda .$$

Jak je možno tyto inkluse graficky znázornit viz na následující straně (nahoře).

Množina $M \subset P$ se nazývá <u>nulová</u>, jestliže $\tilde{A}c_M = 0$ (c_M je tzv. <u>charakteristická funkce množiny M</u>, je definována takto: $c_M(x) = 1$ pro $x \in M$, $c_M(x) = 0$ pro $x \in P - M$). Řekneme, že funkce f a g jsou na množině P <u>ekvivalentní</u> (budeme značit $f \sim g$), jestliže množina $\{ x \in P \; ; \; f(x) \neq g(x) \}$ je nulová.

Platí tato věta:

$\boxed{\text{věta } 11}$: $f \sim g \Rightarrow \tilde{A}f = \tilde{A}g$, $\underset{\sim}{A}f = \underset{\sim}{A}g$.



Obrázek č.3

Tedy horní a dolní integrál funkce f se nezmění, změníme-li funkci f na nulové množině. Proto definujeme horní a dolní integrál i pro funkce, které jsou definovány jen "<u>skoro všude</u>" v P, tj. jsou definovány všude až na nulovou množinu. Je vidět, že funkci f můžeme na této nulové množině dodefinovat jak chceme, aniž tím změníme hodnotu jejího horního či dolního integrálu.

Buď dán nyní určitý výrok $V(x)$ týkající se prvků množiny $X \subset P$. Řekneme, že $V(x)$ platí skoro všude (v X), jestliže množina $\{ x \in X ; \ V(x) \text{ neplatí} \}$ je nulová. Můžeme tedy kupříkladu říci, že funkce f a g jsou ekvivalentní, právě když $f = g$ skoro všude (v P).

Pro <u>libovolnou</u> množinu $M \subset P$ definujeme její <u>vnější míru</u> $\tilde{\mu} M$ předpisem

$$\tilde{\mu} M = \tilde{A} c_M .$$

Je-li $c_M \in \mathcal{L}^*$, definujeme tzv. <u>míru množiny M</u>

$$\mu M = A c_M .$$

Systém všech množin $M \subset P$, pro něž $c_M \in \mathcal{L}^*$, značme symbolem $\mathfrak{M}$. Množiny ze systému $\mathfrak{M}$ nazýváme <u>měřitelné</u>, funkci μ pak říkáme <u>míra</u> na $\mathfrak{M}$.

Je-li tedy nějaká množina neměřitelná, má pouze vnější míru, nikoliv míru. Pro měřitelné množiny míra splývá s vnější mírou.

Buď nyní $M \subset P$ měřitelná množina, $f \in S(P)$ libovolná funkce na P. Definujeme funkci $\hat{f}$ takto:

$$\hat{f}(x) = f(x) \text{ pro } x \in M , \quad \hat{f}(x) = 0 \text{ pro } x \in P - M ,$$

tj. $\hat{f} = f.c_M$ (kde pochopitelně chápeme $0 . \pm\infty = \pm\infty . 0 = 0$).

Platí následující věta:

$\boxed{\text{věta } 12}$: $f \in \Omega \implies \hat{f} \in \Omega$, kde Ω může znamenat kterýkoliv ze systémů $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ.

Je-li opět $M \subset P$ měřitelná množina a funkce f je definována pouze na množině M, definujme funkci $\overline{f}$ následovně:

$$\overline{f}(x) = f(x) \text{ pro } x \in M , \quad \overline{f}(x) = 0 \text{ pro } x \in P - M .$$

Dále definujme horní a dolní integrál přes množinu M takto

$$\tilde{A}_M f = \tilde{A} \overline{f} , \quad \underset{\sim}{A}_M f = \underset{\sim}{A} \overline{f} .$$

Konečně definujeme systémy $\mathcal{L}_M$, $\mathcal{L}_M^R$, $\mathcal{L}_M^K$, $\mathcal{L}_M^*$, Λ_M vztahem

$f \in \Omega_M \iff \overline{f} \in \Omega$, kde Ω opět může znamenat libovolný ze systémů $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ.

Upozorněme znovu, že tyto systémy definujeme pouze v případě $M \in \mathfrak{M}$; napíšeme-li proto v dalším $\mathcal{L}_M$, automaticky předpokládáme, že množina M je měřitelná.

Pro funkce ze systémů $\mathcal{L}_M^*$ definujeme A_M - integrál přes množinu M - předpisem

$$A_M f = A \overline{f} \quad (= \tilde{A}_M f = \underset{\sim}{A}_M f) .$$

Nyní lze odvodit následující věty:

A/ O míře a měřitelných množinách

$\boxed{\text{věta } 13}$: $M_n \in \mathfrak{M} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathfrak{M}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathfrak{M}$, $M_1 - M_2 \in \mathfrak{M}$,

$\boxed{\text{věta } 14}$: $\emptyset \in \mathfrak{M}$,

$\boxed{\text{věta } 15}$: $M_n \in \mathfrak{M} \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu M_n$,

Jsou-li navíc množiny M_n po dvou disjunktní, platí rovnost ,

$\boxed{\text{věta } 16}$: $M_n \in \mathfrak{M}$, $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots\ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu M_n$,

$\boxed{\text{věta } 17}$: $M_n \in \mathfrak{M}$, $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots\ldots$, $\mu M_1 < +\infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n\right) =$
$= \lim_{n\to\infty} \mu M_n$,

B/ Pro integraci posloupností a řad funkcí

$\boxed{\text{věta } 18}$: a/ $f_n \in \mathcal{L}_M^R$, $f_n \nearrow f$ skoro všude na $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^R$,
$A_M f_n \longrightarrow A_M f$,
b/ $f_n \in \mathcal{L}_M^K$, $f_n \searrow f$ sk.vš. na $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^K$,
$A_M f_n \longrightarrow A_M f$ /tzv. Leviho věta/,

$\boxed{\text{věta } 19}$: $f_n \in \Lambda_M$, $f_n \longrightarrow f$ sk.vš. na M , existuje funkce $g \in \mathcal{L}_M$ tak, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro všechna n a sk.vš. $x \in M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$ a $A_M f_n \longrightarrow A_M f$
/tzv. Lebesgueova věta/,

$\boxed{\text{věta } 20}$: $f_n \in \mathcal{L}_M$, $\mu M < +\infty$, $f_n \rightrightarrows f$ na M /tj. posloupnost funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M / $\Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$ a $A_M f_n \longrightarrow A_M f$,

$\boxed{\text{věta } 21}$: a/ $v_n \in \Lambda_M$, $v_n \geq 0$ sk. vš. na M ,
$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sk. vš. na $M \Rightarrow v \in \mathcal{L}_M^R$ a $A_M v =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$,
b/ $v_n \in \Lambda_M$, $v_n \leq 0$ sk. vš. na M ,
$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sk. vš. na $M \Rightarrow v \in \mathcal{L}_M^K$ a $A_M v =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$ /Leviho věta / ,

$\boxed{\text{věta } 22}$: $v_n \in \Lambda_M$, $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sk. vš. na M , nechť existuje funkce $g \in \mathcal{L}_M$ tak, že pro všechna k a sk.vš. $x \in M$ jest $\left| \sum_{j=1}^{k} v_j(x) \right| \leq g(x) \Rightarrow v \in \mathcal{L}_M$ a $A_M v =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$
/Lebesgueova věta/ ,

$\boxed{\text{věta 23}}$: $v_n \in \mathcal{L}_M$, $\mu M < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$ stejnoměrně na $M \Rightarrow v \in \mathcal{L}_M$ a $A_M v = \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$.

C/ <u>Pro závislost na integračním oboru</u>

$\boxed{\text{věta 24}}$: M nulová, $f \in S(P) \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^*$ a $A_M f = 0$,

$\boxed{\text{věta 25}}$: $M, N \in \mathfrak{M}$, $N \subset M$, $f \in \mathcal{L}_M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_N$
/obdobně pro systémy $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ /,

$\boxed{\text{věta 26}}$: $M_1, \dots, M_n \in \mathfrak{M}$ po dvou disjunktní,
$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \Rightarrow A_M f = \sum_{i=1}^{n} A_{M_i} f$,
má-li <u>jedna</u> strana smysl
/tj. je buďto $f \in \mathcal{L}_M^*$ anebo je $f \in \mathcal{L}_{M_i}^*$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ a součet vpravo má smysl/,

$\boxed{\text{věta 27}}$: $M_n \in \mathfrak{M}$ po dvou disjunktní, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$,
$\underline{f \in \mathcal{L}_M^*} \Rightarrow A_M f = \sum_{i=1}^{\infty} A_{M_i} f$,

$\boxed{\text{věta 28}}$: $M_n \in \mathfrak{M}$, $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$,
$\underline{f \in \mathcal{L}_M^*} \Rightarrow A_M f = \lim_{n\to\infty} A_{M_n} f$,

$\boxed{\text{věta 29}}$: $M_n \in \mathfrak{M}$, $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$, $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$,
$f \in \mathcal{L}_{M_1} \Rightarrow A_M f = \lim_{n\to\infty} A_{M_n} f$.

D/ <u>O měřitelných funkcích</u>

$\boxed{\text{věta 30}}$: $f_n \in \Lambda_M$, $f_n \to f$ sk.vš. v $M \Rightarrow f \in \Lambda_M$,

$\boxed{\text{věta 31}}$: $f \in \Lambda_M$, $g \in \mathcal{L}_M$, $|f| \leq g$ sk.vš. v $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$,

$\boxed{\text{věta 32}}$: $f \in \Lambda_M \Leftrightarrow f^+ \in \mathcal{L}_M^R$, $f^- \in \mathcal{L}_M^R$
/kde $f^+ = \max(f, 0)$ je tzv. kladná část funkce f, $f^- = \max(-f, 0)$ záporná část f /,

$\boxed{\text{věta 33}}$: a/ $f \in \Lambda_M$, $f \geq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^R$,
b/ $f \in \Lambda_M$, $f \leq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^K$,
c/ $f \in \Lambda_M \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}_M^R$,
/odtud speciálně plyne, že

$$c_M \in \Lambda_M \Leftrightarrow M \in \mathcal{M} ,$$

tj. množina je měřitelná, právě když její charakteristická funkce je měřitelná/,

$\boxed{\text{věta } 34}$: $f \in \Lambda \Leftrightarrow$ existují $f_n \in Z$, $f_n \longrightarrow f$ sk. vš.,

$\boxed{\text{věta } 35}$: $f \in \Lambda_M - \mathcal{L}^*_M \Leftrightarrow f^+ \in \mathcal{L}^R_M$, $f^- \in \mathcal{L}^R_M$,
$A_M f^+ = A_M f^- = +\infty$,

$\boxed{\text{věta } 36}$: $f \in \Lambda_M - \mathcal{L}^*_M \Rightarrow \tilde{A}_M f = +\infty$, $\underset{\sim}{A}_M f = -\infty$.

E/ <u>O integrálu</u>

$\boxed{\text{věta } 37}$: $f \in \mathcal{L} \Rightarrow f$ je konečná skoro všude ,

$\boxed{\text{věta } 38}$: a/ $f \in \mathcal{L}^R \Rightarrow f > -\infty$ sk. vš. ,
b/ $f \in \mathcal{L}^K \Rightarrow f < +\infty$ sk. vš. ,

$\boxed{\text{věta } 39}$: $f,g \in \mathcal{L}^*_M$, $f \leq g$ sk. vš. v $M \Rightarrow A_M f \leq A_M g$,

$\boxed{\text{věta } 40}$: $f \in \mathcal{L}^*_M$, $c \in E_1 \Rightarrow c.f \in \mathcal{L}^*_M$ a $A_M(cf) = c.A_M f$,

$\boxed{\text{věta } 41}$: $f \in \mathcal{L}^*_M$, $g \in \mathcal{L}^*_M$, nechť má smysl součet
$A_M f + A_M g \Rightarrow$ skoro všude v M má smysl součet $f + g$,
jest $f + g \in \mathcal{L}^*_M$,
$A_M (f + g) = A_M f + A_M g$,

$\boxed{\text{věta } 42}$: $f \in \mathcal{L}^*_M \Leftrightarrow f^+ \in \mathcal{L}^R_M$, $f^- \in \mathcal{L}^R_M$ a má smysl rozdíl
$A_M f^+ - A_M f^-$ /potom ovšem je $A_M f = A_M f^+ - A_M f^-$ / ,

$\boxed{\text{věta } 43}$: $f \in \mathcal{L}^*_M \Rightarrow |A_M f| \leq A_M|f|$,

$\boxed{\text{věta } 44}$: $f \in \Lambda_M \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_M \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}_M\right]$,

$\boxed{\text{věta } 45}$: $f \geq 0$ sk.vš. v M , $A_M f = 0 \Rightarrow f \sim 0$ v M ,

$\boxed{\text{věta } 46}$: $f \in \mathcal{L} \Rightarrow$ existují $f_n \in Z$ a funkce $g \in \mathcal{L}$ tak, že
$|f_n| \leq g$ a $f_n \longrightarrow f$ sk.vš.

Nejdůležitějším příkladem základního prostoru (Z,A) je případ, kdy zvolíme $P = E_r$, za základní systém funkcí zvolíme systém funkcí C_r a za základní funkcionál A Riemannův integrál přes E_r . Podrobněji - C_r je systém všech spojitých funkcí v E_r , každá z nichž je rovna nule vně nějakého kompaktního intervalu. Ještě jinak řečeno, definujeme-li pro libovolnou funkci f v E_r její nosič N_f

$$N_f = \overline{\{ x \in E_r \; ; \; f(x) \neq 0 \}}$$ /kde pruh znamená uzávěr v E_r /,

je C_r systém všech spojitých funkcí v E_r s kompaktním nosičem. /Ukažte, že C_r tvoří základní systém funkcí, tj. splňuje axiomy 1_Z, 2_Z, 3_Z ! /

Pro libovolnou funkci $f \in C_r$ definujeme Af jako Riemannův integrál funkce f přes E_r.

Je-li $f \in C_r$, existuje kompaktní interval $I \subset E_r$, vně kterého je $f = 0$, definujeme

$$(R)\int_{E_r} f = (R)\int_I f(x)\,dx .$$

Ukažte, že

1/ $f \in C_r \Rightarrow$ existuje $(R)\int_{E_r} f$,

2/ $(R)\int_{E_r} f$ nezávisí na výběru intervalu I.

Lze ukázat, že Riemannův integrál přes E_r splňuje axiomy $4_A - 7_A$ /pro $Z = C_r$/. Rozšíříme-li nyní základní systém $Z = C_r$ se základním funkcionálem $A = (R)\int_{E_r}$, dostaneme teorii, v níž platí ještě navíc některé další důležité věty /které obecně nemusí platit/. Rozšířenému funkcionálu říkejme v tomto případě krátce Lebesgueův integrál, příslušné míře Lebesgueova míra. Je-li zapotřebí zvláště vyznačit závislost na dimensi E_r, říkejme podrobněji r - rozměrný Lebesgueův integrál, r - rozměrná Lebesgueova míra /značme ji symbolem μ_r /. Systém všech měřitelných množin v E_r značme symbolem $\mathcal{M}_r$. Lebesgueův integrál přes množinu $M \subset E_r$ značme $(L)\int_M$ anebo - nehrozí-li nedorozumění - krátce $\int_M$.

věta 47 : a/ $f \in Z^R \Leftrightarrow f > -\infty$ všude v E_r, $f \geq 0$ vně nějakého kompaktního intervalu, f je polospojitá 1/ zdola v E_r,

b/ $f \in Z^K \Leftrightarrow f < +\infty$ všude v E_r, $f \leq 0$ vně nějakého kompaktního intervalu, f je polospojitá 1/ shora v E_r,

c/ $Z = Z^R \cap Z^K$,

věta 48 : f je spojitá na měřitelné množině $M \Rightarrow f \in \Lambda_M$,

věta 49 : buď $I \subset E_r$ kompaktní interval, nechť existuje

$$(R)\int_I f \Rightarrow f \in \mathcal{L}_I \quad \text{a} \quad (R)\int_I f = (L)\int_I f ,$$

1/ Funkce f se nazývá polospojitá zdola /shora/ v bodě $x_0 \in E_r$, jestliže ke každému $\alpha < f(x_0)$ ($\alpha > f(x_0)$) existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0 takové, že $f(x) > \alpha$ ($f(x) < \alpha$) pro všechna $x \in U(x_0)$.
Funkce f se nazývá polospojitá zdola /shora/ v množině $M \subset E_r$, je-li polospojitá zdola /shora/ v každém bodě množiny M.

$\boxed{\text{věta } 50}$: $M \subset E_r$ otevřená nebo uzavřená $\Rightarrow$ $M \in \mathcal{M}_r$,

$\boxed{\text{věta } 51}$: $I \subset E_r$ buď interval /libovolný/ $\Rightarrow$ $I \in \mathcal{M}_r$ a

$\mu_r I = \text{vol } I$

/kde vol I znamená objem intervalu I , viz též př. 7,18/,

$\boxed{\text{věta } 52}$: a/ každá jednobodová množina v E_r je nulová,

b/ každá spočetná množina v E_r je nulová ,

$\boxed{\text{věta } 53}$: a/ $a > 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}(a,+\infty) \Leftrightarrow \alpha > 1 \right]$

b/ $a,b \in E_1$, $a < b \Rightarrow \left[\frac{1}{(x-a)^\alpha} \in \mathcal{L}(a,b) \Leftrightarrow \alpha < 1 \right]$

$\boxed{\text{věta } 54}$: existují neměřitelné množiny a neměřitelné funkce, přesněji

a/ $M \subset E_r$, $\tilde{\mu}_r M > 0 \Rightarrow$ existuje $N \subset M$, $N \notin \mathcal{M}_r$,

b/ $M \subset E_r$, $M \in \mathcal{M}_r$, $\mu M > 0 \Rightarrow$ existuje f taková,

že $f \notin \Lambda_M$,

$\boxed{\text{věta } 55}$: $M \subset E_r \Rightarrow \tilde{\mu}_r M = \inf\limits_{\substack{G \supset M \\ G \text{ otevřená}}} \mu_r G$

$\boxed{\text{věta } 56}$: $f \in \Lambda_M \Leftrightarrow$ pro každé $c \in E_1$ je $\{ x \in M ;\ f(x) > c \} \in \mathcal{M}$,

$\boxed{\text{věta } 57}$: buď f omezená na intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$, potom

$(R)\int_a^b f$ existuje $\Leftrightarrow$ množina

$\{ x \in \langle a,b \rangle ;$ f není spojitá v bodě $x \}$ je nulová

<u>Označení .</u>

Je-li $M \subset E_{r+s}$, nechť pro každé $y \in E_s$ je

$$M^{*,y} = \{ x \in E_r \ ;\ [x,y] \in M \}$$

a pro každé $x \in E_r$ je

$$M^{x,*} = \{ y \in E_s \ ;\ [x,y] \in M \}$$ /kreslete v rovině !/.

Je-li funkce f definována v množině $M \subset E_{r+s}$, označme $f^{*,y}$, resp. $f^{x,*}$ funkci definovanou v $M^{*,y}$, resp. $M^{x,*}$ vztahem

$$f^{*,y}(x) = f(x,y), \text{ resp. } f^{x,*}(y) = f(x,y) .$$

$\boxed{\text{věta } 58}$: /Fubiniova/

Buď $M \subset E_{r+s}$ měřitelná množina, buď M' průmět množiny M do prostoru E_r prvních r souřadnic, tj.

$M' = \{ x \in E_r$; existuje $y \in E_s$ tak, že $[x,y] \in M \}$

/kreslete v E_2 ! / , buď $f \in \mathcal{L}^*_M$.

Potom pro sk.vš. $x \in E_r$ je $f^{x,*} \in \mathcal{L}^*_{M^{x,*}}$;

označíme-li $F(x) = (L)\int_{M^{x,*}} f^{x,*}$, je $F \in \mathcal{L}^{*}_{M}$,

a $(L)\int_{M} f = (L)\int_{M'} F$.

Připomeňme si nyní definici regulárního zobrazení.

Řekněme, že zobrazení $f = (f_1, \dots, f_r)$ množiny $M \subset E_r$ do E_r je <u>regulární v množině M</u>, jestliže

1/ M je otevřená,

2/ funkce f_i /$i = 1,\dots,r$/ mají v množině M spojité parciální derivace,

3/ Jacobiův determinant zobrazení f

$$D_f(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u), \dots\dots, \frac{\partial f_1}{\partial u_r}(u) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial u_1}(u), \dots\dots, \frac{\partial f_r}{\partial u_r}(u) \end{vmatrix} \neq 0$$

pro všechna $u = (u_1,\dots,u_r) \in M$.

$\boxed{\text{věta } 59}$: /věta o substituci/

Buď f prosté a regulární zobrazení množiny $P \subset E_r$ na množinu $R \subset E_r$ /tj. $f(P) = R$/.

Potom

$$\int_R F(x)\,dx = \int_P F(f(u)) . |D_f(u)|\,du ,$$

má-li jedna strana rovnosti smysl.

$\boxed{\text{věta } 60}$: /věta o spojité závislosti integrálu na parametru/

Buď $f(x,\alpha)$ funkce definovaná v množině $M \times A$, kde $M \subset E_1$, $A \subset E_1$, nechť

1/ pro každé $\alpha \in A$ je $f(x,\alpha) \in \Lambda_M$ /přesněji $f^{*,\alpha} \in \Lambda_M$/,

2/ pro sk.vš. $x \in M$ je $f(x,\alpha)$ spojitá v množině A jakožto funkce α /přesněji funkce $f^{x,*}$ je spojitá v A /,

3/ existuje funkce $g \in \mathcal{L}_M$ tak, že nerovnost $|f(x,\alpha)| \leq g(x)$ je splněna pro sk. vš. $x \in M$ a všechna $\alpha \in A$.

Potom funkce $f(x,\alpha) \in \mathcal{L}_M$ pro všechna $\alpha \in A$ /přesněji $f^{*,\alpha} \in \mathcal{L}_M$ / a funkce F ,

$$F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx ,$$

je spojitá v množině A .

$\boxed{\text{věta } 61}$: /věta o derivaci integrálu podle parametru/

Buď $f(x,\alpha)$ funkce definovaná v množině $M \times I$, kde $M \subset E_1$ a I je <u>interval</u> v E_1 , nechť

1/ pro každé $\alpha \in I$ je $f^{*,\alpha} \in \Lambda_M$,

2/ alespoň pro jedno $\alpha \in I$ je $f^{*,\alpha} \in \mathcal{L}_M$,

3/ existuje nulová množina $N \subset M$ tak, že pro všechna $x \in M - N$ a pro všechna $\alpha \in I$

a/ existuje konečná $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$,

b/ existuje funkce $G \in \mathcal{L}_M$ tak, že

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \leq G(x) .$$

Potom

I/ pro každé $\alpha \in I$ je $f^{*,\alpha} \in \mathcal{L}_M$, označme opět

$F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\, dx$,

II/ pro každé $\alpha \in I$ je

$$F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, dx$$

věta 62 : /geometrický význam integrálu/

Buď $R \subset E_r$ množina, $f \in S(R)$, označme

$N_1(f) = \{ [x,y] \in R \times E_1 ;\ 0 < y < f(x) \}$,

$N_2(f) = \{ [x,y] \in R \times E_1 ;\ 0 \leq y \leq f(x) \}$,

$\text{graf } f = \{ [x,y] \in R \times E_1 ;\ y = f(x) \}$.

I/ Je-li f spojitá v R , R uzavřená, jsou množiny graf f, $N_2(f)$ uzavřené v E_{r+1} a

1/ $\mu_{r+1}(\text{graf } f) = 0$,

2/ je-li navíc $f \geq 0$ v R , je

$\mu_{r+1}(N_2(f)) = (L)\int_R f(x)dx$.

II/ Je-li f spojitá v R , R otevřená, je množina $N_1(f)$ otevřená v E_{r+1} . Je-li navíc $f \geq 0$ v R , je

$$\mu_{r+1}(N_1(f)) = (L)\int_R f(x)dx .$$

Jako dodatek k této kapitole uvedeme ještě definici a základní vlastnosti zobecněného Newtonova integrálu.

definice 63 : /definice zobecněné primitivní funkce/

Buď $(a,b) \subset E_1$ interval libovolného druhu. Funkci F nazýváme <u>zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b)</u>, jestliže

1/ F je spojitá v (a,b) ,

2/ existuje konečná množina K tak, že

$$F' = f \quad \text{v } (a,b) - K .$$

věta 64 : Jsou-li F, G dvě zobecněné primitivní funkce k funkci f v intervalu (a,b), existuje konstanta $k \in E_1$ tak, že $f - G = k$ v (a,b).

definice 65 : /definice zobecněného Newtonova integrálu/

Buď $(a,b) \subset E_1$ interval, f funkce na (a,b). Nechť existuje zobecněná primitivní funkce F k funkci f v (a,b), nechť existují vlastní $\lim\limits_{x\to a_+} F(x)$, $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)$.

Potom rozdíl $\lim\limits_{x\to b_-} F(x) - \lim\limits_{x\to a_+} F(x)$ nazýváme zobecněným Newtonovým integrálem funkce f v (a,b) a značíme následovně

$$(ZN)\int_a^b f = (ZN)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = \Big[F(x)\Big]_a^b .$$

Poznámky:

a/ $(ZN)\int_a^b f$ nezávisí na volbě zobecněné primitivní funkce k funkci f v (a,b),

b/ neexistuje-li zobecněná primitivní funkce F k funkci f v intervalu (a,b) anebo neexistuje-li některá z limit $\lim\limits_{x\to a_+} F(x)$, $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)$ vlastní, říkáme, že $(ZN)\int_a^b f$ neexistuje,

c/ v definici zobecněné primitivní funkce k funkci f v (a,b) a v definici $(ZN)\int_a^b f$ není třeba předpokládat, že funkce f je definována v celém intervalu (a,b), stačí, je-li definována v $(a,b) - M$, kde M je konečná množina,

d/ je-li F zobecněná primitivní funkce k funkci f v intervalu (a,b), kde $a,b \in E_1$ a je-li navíc F spojitá v $\langle a,b\rangle$, je

$$(ZN)\int_a^b f = F(b) - F(a) ,$$

e/ existence ani hodnota $(ZN)\int_a^b f$ se nezmění, změníme-li hodnoty integrované funkce f v konečném počtu bodů v (a,b),

f/ pro libovolné $a \in E_1$ definujeme $(ZN)\int_a^a f = 0$,

g/ je-li $a > b$, definujeme $(ZN)\int_a^b f = -(ZN)\int_b^a f$, pokud $(ZN)\int_b^a f$ existuje,

h/ zopakujte si též definici Newtonova integrálu, porovnejte tuto s definicí ZN - integrálu,

k/ rovněž tak následující věty formulujte pro Newtonův integrál.

věta 66 : Nechť existuje $(ZN)\int_a^b f$, potom

a/ pro libovolné $c \in (a,b)$ existuje $(ZN)\int_a^c f$,

b/ označíme-li pro každé $x \in (a,b)$ $\Phi(x) = (ZN)\int_a^x f$, je Φ zobecněnou primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a,b), přičemž $\Phi'(x) = f(x)$ v těch bodech, v nichž f je spojitá.

věta 67 : Je-li $a < b < c$, potom

$$(ZN)\int_a^c f = (ZN)\int_a^b f + (ZN)\int_b^c f ,$$

existuje-li buďto integrál vlevo anebo oba integrály vpravo.

věta 68 : Nechť existují $(ZN)\int_a^b f$, $(ZN)\int_a^b g$, nechť $\alpha, \beta \in E_1$. Potom existuje také $(ZN)\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ a platí

$$(ZN)\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha (ZN)\int_a^b f + \beta (ZN)\int_a^b g .$$

věta 69 : Nechť existuje $(ZN)\int_a^b f$, nechť $f \geq 0$ v $(a,b) - M$, kde M je konečná množina.
Potom $(ZN)\int_a^b f \geq 0$.

věta 70 : /integrace per partes pro ZN - integrál/
Nechť F , resp. G je zobecněná primitivní funkce k funkci f , resp. g v intervalu (a,b) .
Potom

$$(ZN)\int_a^b F.g = \Big[F.G\Big]_a^b - (ZN)\int_a^b f.G ,$$

mají-li alespoň dva výrazy v této rovnici smysl.

věta 71 : /substituční metoda pro ZN - integrál/
Nechť

a/ funkce g je spojitá a ryze monotonní v intervalu (α, β) ,

b/ $g((\alpha,\beta)) = (a,b)$,

c/ existuje vlastní $g'(t) \neq 0$ v $(a,b) - M$, kde M je konečná množina.

Potom

$$(ZN)\int_a^b f = (ZN)\int_\alpha^\beta f(g(t)) \, . \, |g'(t)| \, dt ,$$

existuje-li alespoň jeden z těchto integrálů.

věta 72 : Nechť f je spojitá v $\langle a,b\rangle$,
Potom

$$\left| (ZN)\int_a^b f \right| \leq (ZN)\int_a^b |f| .$$

věta 73 : Nechť f je spojitá a omezená v $(a,b) - K$, kde K je konečná množina, nechť $a,b \in E_1$. Potom $(ZN)\int_a^b f$ existuje.

věta 74 : Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a,b)$, kde $b \in E_1$ anebo $b = +\infty$. Nechť $|f| \leq g$ v $\langle a,b)$ a nechť existuje $(ZN)\int_a^b g$. Potom existují také $(ZN)\int_a^b f$ a $(ZN)\int_a^b |f|$.

věta 75 : Nechť funkce f , g jsou spojité v $\langle a,b)$ /$b \in E_1$ nebo $b = +\infty$ / , nechť funkce g je monotonní v $\langle a,b)$.
Potom $(ZN)\int_a^b f.g$ existuje, jestliže buď

1/ $(ZN)\int_a^b f$ existuje a funkce g je omezená v $\langle a,b)$ /Abelovo kriterium/ anebo

2/ (ZN) $\int_a^x f$ je omezenou funkcí proměnné x v $\langle a,b)$ a $\lim\limits_{x \to b_-} g(x) = 0$ /Dirichletovo kriterium/.